TEMA 7

La Transformada de Laplace

7.1. Definición de la Transformada de Laplace. Propiedades.

Se llama **Transformada de Laplace** de la función $F(t)\quad t \geq 0$ a la función

$$L(F(t)) = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \ ,$$

siempre y cuando la función esté definida.

Ejemplo 7.1.1. Sea $F(t) = e^{at}$, entonces

$$L(F(t)) = L(e^{at}) = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^\infty$$

Por tanto,

$$\text{si } a > s \ \Rightarrow \ \frac{1}{a-s}(e^{\infty} - e^0) = \infty \quad \Rightarrow \quad \nexists L(e^{at})$$

$$\text{si } a < s \Rightarrow \frac{1}{a-s}(e^{-\infty} - e^0) = \frac{-1}{a-s} = \frac{1}{s-a} \ .$$

Es decir,

$$L(e^{at}) = \frac{1}{s-a} \quad / \quad s > a \ .$$

Sea $f(s) = L(F(t))$, llamaremos **Transformada Inversa de Laplace**, $L^{-1}(f(s)) = F(t)$.

Función F(t)	**Transformada de Laplace L(F(t))=f(s)**	**Función F(t)**	**Transformada de Laplace L(F(t))=f(s)**
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	k	$\frac{k}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$sen(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$senh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$		

7.1.1. Propiedades de la Transformada de Laplace.

Sean $L(F(t)) = f(s)$, $L(G(t)) = g(s)$, $L^{-1}(f(s)) = F(t)$, $L^{-1}(g(s)) = G(t)$ y $\alpha, \beta \in \Re$. Entonces, se verifica:

P1) **Linealidad**

$$L(\alpha F(t) + \beta G(t)) = \alpha L(F(t)) + \beta L(G(t))$$

$$L^{-1}(\alpha f(s) + \beta g(s)) = \alpha L^{-1}(f(s)) + \beta L^{-1}(g(s))$$

P2) **Primera Traslación**

$$L(e^{at}F(t)) = f(s-a)$$

$$L^{-1}(f(s-a)) = e^{at}F(t)$$

P3) **Segunda Traslación**

$$\text{Si } G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} \Rightarrow L(G(t)) = e^{-as}f(s)$$

$$L^{-1}(e^{-as}f(s)) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

P4) **Cambio de escala**

$$L(F(at)) = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$$
$$L^{-1}(f(as)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{t}{a}\right)$$

P5) **Transformada de las derivadas**

$$\begin{aligned}
&L(F'(t)) = sf(s) - F(0)\\
&L(F''(t)) = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)\\
&\vdots\\
&L(F^{(n}(t)) = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - \ldots - sF^{(n-2}(0) - F^{(n-1}(0)
\end{aligned}$$

Esta propiedad nos será muy útil para la resolución de ecuaciones diferenciales, que veremos más adelante.

P6)
$$L(t^n F(t)) = (-1)^n f^{(n}(s)$$
$$L^{-1}(f^{(n}(s)) = (-1)^n t^n F(t)$$

P7)
$$L\left(\frac{F(t)}{t}\right) = \int_s^\infty f(u)du \quad \text{siempre que} \quad \exists \quad \lim_{t\to 0}\left(\frac{F(t)}{t}\right)$$
$$L^{-1}\left(\int_s^\infty f(u)du\right) = \frac{F(t)}{t}$$

y también se verifica que:

$$L^{-1}\left(\frac{f(s)}{s}\right) = \int_0^t F(u)du$$

P8) **Teorema de Convolución**

$$L\left(\int_0^t F(u)G(t-u)du\right) = f(s)g(s)$$
$$L^{-1}(f(s)g(s)) = \int_0^t F(u)G(t-u)du$$

Ejemplo 7.1.2. Calcular $L^{-1}\left(\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}\right)$

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} A+B=3 \\ -3A+B=7 \end{array} \Rightarrow A=-1 \quad B=4$$

y, por tanto

$$L^{-1}\left(\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right) = L^{-1}\left(\frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s-3}\right) =$$

$$-1L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)+4L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right)=-e^{-t}+4e^{3t}$$

Ejemplo 7.1.3. Calcular $L(e^{3t}t^2)$

Puede plantearse de dos formas.
Partiendo de que $L(t^2)=\dfrac{2!}{s^3}=\dfrac{2}{s^3}=f(s)$, mediante la Propiedad 2 se concluye que

$$L(e^{3t}t^2)=f(s-3)\ =\ \frac{2}{(s-3)^3}\,.$$

Por otra parte, partiendo de $L(e^{3t})=\dfrac{1}{s-3}=f(s)$, y teniendo en cuenta que

$$f'(s)=\frac{-1}{(s-3)^2}\quad \text{y}\quad f''(s)=\frac{2}{(s-3)^3}\,,$$

mediante la Propiedad 6 se concluye que

$$L(e^{3t}t^2)=(-1)^2f''(s)=\frac{2}{(s-3)^3}\,.$$

Ejemplo 7.1.4. Calcular $L\left(\dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t}\right)$

Veamos que se puede aplicar la Propiedad 7:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(t)}{1}=1\,.$$

Por tanto,

$$L\left(\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\right)=\int_s^\infty f(u)\,du\ \ ,\ \ \text{donde}\ \ f(s)=L(F(t))=L(\operatorname{sen}(t))=\frac{1}{s^2+1}\,.$$

Entonces,

$$L\left(\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\right)=\int_s^\infty\frac{du}{u^2+1}=\arctan(u)\Big|_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\arctan(s)=\arctan\left(\frac{1}{s}\right)\,.$$

Ejemplo 7.1.5. Hallar $L(H(t))$ siendo $H(t)=\displaystyle\int_0^t \operatorname{sen}(2u)\,\cos(t-u)\,du$

$L(H(t))=L(\operatorname{sen}(2s)).L(\cos(s))=\dfrac{2}{s^2+4}.\dfrac{s}{s^2+1}\,.$

7.2. Aplicación a las Ecuaciones Diferenciales

Sea una ecuación diferencial de segundo orden lineal con coeficientes constantes

$$a_0\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_2y=f(x)\quad a_0\neq 0\qquad \text{ó}\qquad a_0y''+a_1y'+a_2y=f(x)\quad a_0\neq 0\ .$$

Aplicando la Transformada de Laplace a ambos lados, se convierte la ecuación diferencial en una ecuación algebraica, $L(y(x))=y_s$, de forma que la solución será $y(x)=L^{-1}(y_s)$.

Ejemplo 7.2.1. Halla la solución de la ecuación diferencial

$$y''+y=x,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-2$$

$$L(y''+y)=L(x)\Rightarrow L(y'')+L(y)=L(x)\Rightarrow s^2y_s-sy(0)-y'(0)+y_s=\frac{1}{s^2}$$

$$s^2y_s-s+2+y_s=\frac{1}{s^2}\Rightarrow y_s(s^2+1)=\frac{1}{s^2}+(s-2)\Rightarrow y_s=\frac{1+s^2(s-2)}{s^2(s^2+1)}=\frac{A}{s^2}+\frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$A=1,\quad B=1,\quad C=-3\Rightarrow y_s=\frac{1}{s^2}+\frac{s}{s^2+1}-\frac{3}{s^2+1}$$

La solución será

$$y(x)=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)+L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)-3L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=x+\cos(x)-3\,\mathrm{sen}(x)$$

Ejemplo 7.2.2. Halla la solución de la ecuación diferencial

$$y''+y=cos(t)\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$$

$$L(y'')+L(y)=L(cos(t))\Rightarrow s^2y_s-sy(0)-y'(0)+y_s=\frac{s}{s^2+1}\Rightarrow y_s(s^2+1)-1=\frac{s}{s^2+1}\Rightarrow$$

$$y_s=\frac{s^2+s+1}{(s^2+1)^2}=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{(s^2+1)^2}\Rightarrow A=0,\quad B=1,\quad C=1,\quad D=0$$

$$y_s=\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{(s^2+1)^2}\Rightarrow y(x)=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)+L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right)=\mathrm{sen}(t)+\frac{t}{2}\,\mathrm{sen}(t)$$

Ejemplo 7.2.3. Halla la solución de la ecuación diferencial

$$y''-4y'+4y=t^3e^{2t}\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

$$L(y'')-4L(y')+4L(y)=L(t^3e^{2t})\Rightarrow s^2y_s-sy(0)-y'(0)-4sy_s+4y(0)+4y_s=\frac{3!}{(s-2)^4}\Rightarrow$$

$$y_s=\frac{6}{(s-2)^4(s^2-4s+4)}=\frac{6}{(s-2)^6}\Rightarrow y(t)=L^{-1}\left(\frac{6}{(s-2)^6}\right)=\frac{1}{20}t^5e^{2t}$$

7.3. Boletín 7

1. Halla las Transformadas de Laplace de las siguientes funciones:

   i) $F(t) = t^2 + 6t - 3$

   ii) $F(t) = 3e^{-4t} + \dfrac{1}{2}\cos(5t) + \dfrac{3}{4}t^3 + 8$

   iii) $F(t) = \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t}$

2. Halla las siguientes Transformadas inversas de Laplace:

   i) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2+6s+13}\right)$

   ii) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2+6s+13}\right)$

   iii) $L^{-1}\left(\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}\right)$

3. Usando la Transformada de Laplace, encuentra la solución de la ecuación
$$y'' - 2y' + 5y = -8e^{-x}\ , \ \ y(0) = 2\ , \ \ y'(0) = 12\ .$$

4. (a) Resuelve la siguiente ecuación mediante la transformada de Laplace
$$y'' - 6y' + 13y = 2e^{3t}\cos(2t)\,, \ \ y(0) = 1\,, \ \ y'(0) = 1\,.$$

   (b) Sea $f(s) = \dfrac{1}{(s+1)^4}$. Calcula $L^{-1}(f(s))$ y deduce $L^{-1}(f^{(5}(s))$ utilizando propiedades de la transformada de Laplace.

5. Usando la Transformada de Laplace, encuentra la solución de la ecuación
$$y'' - y = 4e^{x} - 2e^{-x}\ , \ \ y(0) = 1\ , \ \ y'(0) = 4\ .$$

6. Usando la Transformada de Laplace, encuentra la solución de la ecuación
$$y'' - 2y' = 1\ , \ \ y(0) = 2\ , \ \ y'(0) = 1\ .$$