

## OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES

Vamos a estudiar la minimización de funciones sujetas a restricciones sobre las variables.

Una formulación general para este problema es:

$$(OCR) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{verificando} \\ c_i(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq m_I \\ c_i(x) \leq 0, \quad m_I + 1 \leq i \leq m_I + m_D \end{cases}$$

Se define el conjunto  $\Omega$  de **puntos admisibles** como el conjunto de todos los puntos  $x$  que satisfacen las restricciones, es decir:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / c_i(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq m_I, \quad c_i(x) \leq 0, \quad m_I + 1 \leq i \leq m_I + m_D\}$$

## Caracterización de una solución

Vamos a definir los distintos tipos de soluciones.

*Un vector  $x^*$  es una **solución global** del problema (OCR) si  $x^* \in \Omega$  y  $f(x^*) \leq f(x)$  para  $x \in \Omega$ .*

*Un vector  $x^*$  es una **solución local** del problema (OCR) si  $x^* \in \Omega$  y existe un entorno  $\mathcal{N}$  de  $x^*$  tal que  $f(x^*) \leq f(x)$  para  $x \in \mathcal{N} \cap \Omega$ .*

De manera análoga podemos definir:

*Un vector  $x^*$  es una **solución local estricta** del problema (OCR) si  $x^* \in \Omega$  y existe un entorno  $\mathcal{N}$  de  $x^*$  tal que  $f(x^*) < f(x)$  para  $x \in \mathcal{N} \cap \Omega$  con  $x \neq x^*$ .*

## Condiciones de optimalidad de primer orden

En un punto admisible  $x$  se dice que **la restricción de desigualdad**  $i \in \{m_I + 1, \dots, m_I + m_D\}$  es

- **activa** si  $c_i(x) = 0$
- **inactiva** si se satisface la desigualdad estricta  $c_i(x) < 0$

La función **lagrangiana** para el problema de optimización con restricciones ( $OCR$ ) se define como:

$$\ell(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m_I+m_D} \lambda_i c_i(x)$$

El **conjunto activo**  $\mathcal{A}(x)$  en cualquier punto admisible  $x$  es la unión del conjunto de los índices correspondientes a las restricciones de igualdad con los índices de las restricciones de desigualdad activas.

Cono tangente, cono normal y direcciones admisibles:

Dado un punto admisible  $x$  se dice que  $\{x_k\}$  es una **sucesión admisible aproximando**  $x$  si  $x_k \in \Omega$  para  $k$  suficientemente grande y  $x_k$  converge a  $x$ .

Un vector  $d$  se dice que es un **vector tangente a**  $\Omega$  en un punto  $x$  si existe una sucesión admisible  $\{x_k\}$  aproximando  $x$  y una sucesión  $\{t_k\}$  de escalares positivos tales que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - x}{t_k} = d$$

El conjunto de todos los vectores tangentes a  $\Omega$  en  $x$  se llama **cono tangente en**  $x$  y se denota por  $\mathcal{T}_\Omega(x)$ .

El **cono normal al conjunto**  $\Omega$  en el punto  $x \in \Omega$  se define como:

$$\mathcal{N}_\Omega(x) = \{v / v^t w \leq 0, \forall w \in \mathcal{T}_\Omega(x)\}$$

Dado un punto  $x$  y el conjunto de restricciones activas  $\mathcal{A}(x)$  definimos el **conjunto de direcciones admisibles linealizadas**,  $\mathcal{F}(x)$ , como:

$$\mathcal{F}(x) = \{d / d^t \nabla c_i(x) = 0, i = 1, \dots, m_I, d^t \nabla c_i(x) \leq 0, i \in \mathcal{A}(x) \cap \{m_I+1, \dots, m_I+m_D\}\}$$

Es importante señalar que la definición de cono tangente está relacionada con la geometría de  $\Omega$  y no con su descripción algebraica mientras que el conjunto  $\mathcal{F}(x)$  sí depende de la definición las funciones de restricción  $c_i$ . Por ejemplo, si consideramos el problema:

$$(\mathcal{EJ}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) = x_1 + x_2 \\ \text{verificando} \\ c_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \end{array} \right.$$

el conjunto admisible es una circunferencia centrada en el origen y de radio  $\sqrt{2}$ , el cono tangente en el punto (no óptimo)  $x = (-\sqrt{2}, 0)^t$  es el conjunto  $\{(0, d_2)^t / d_2 \in \mathbb{R}\}$  y, por definición, el conjunto de direcciones admisibles linealizadas en ese punto es:

$$\mathcal{F}(x) = \{d / d^t \nabla c_1(x) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -2\sqrt{2}d_1 = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} / d_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

y por tanto coincide con el cono tangente.

Sin embargo, si el mismo conjunto admisible lo definimos utilizando:

$$\bar{c}_1(x) = (x_1^2 + x_2^2 - 2)^2 = 0$$

entonces, el cono tangente es el mismo (ya que geoméricamente el conjunto admisible es el mismo) pero:

$$\mathcal{F}(x) = \{d / d^t \nabla \bar{c}_1(x) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 4(x_1^2 + x_2^2 - 2)x_1 \\ 4(x_1^2 + x_2^2 - 2)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\} = \mathbb{R}^2$$

### Hipótesis de cualificación de restricciones:

Las hipótesis de cualificación de restricciones son condiciones bajo las cuales el conjunto de direcciones admisibles linealizadas  $\mathcal{F}(x)$  es similar al cono tangente  $\mathcal{T}_\Omega(x)$ . De hecho la mayoría de condiciones de cualificación aseguran que esos conjuntos sean idénticos. Estas condiciones garantizan que el conjunto  $\mathcal{F}(x)$ , construido linealizando en  $x$  la descripción algebraica del conjunto  $\Omega$ , capture las propiedades geométricas de  $\Omega$  en el entorno de  $x$  que están representadas en  $\mathcal{T}_\Omega(x)$ . La hipótesis de cualificación más utilizada es la siguiente:

*Dado el punto  $x$  y el conjunto activo  $\mathcal{A}(x)$  decimos que se verifica la **cualificación de independencia lineal de restricciones** si el conjunto de los gradientes  $\{\nabla c_i(x), i \in \mathcal{A}(x)\}$  de las restricciones activas en  $x$  es linealmente independiente.*

Otra hipótesis muy simple es la siguiente:

*Si  $x \in \Omega$  y todas las restricciones activas  $c_i$  con  $i \in \mathcal{A}(x)$  son funciones lineales, entonces  $\mathcal{F}(x) = \mathcal{T}_\Omega(x)$ .*

La **condición de cualificación de Mangasarian-Fromovitz** también es muy usada:

*Se dice que  $x$  verifica la condición de cualificación de Mangasarian-Fromovitz si existe  $w \in \mathbb{R}^n$  tal que:*

$$\nabla c_i(x^*)^t w = 0, \quad i = 1, \dots, m_I, \quad \nabla c_i(x^*)^t w < 0, \quad i \in \mathcal{A}(x^*) \cap \{m_I + 1, \dots, m_I + m_D\}$$

y los gradientes correspondientes a las restricciones de igualdad son linealmente independientes.

Condiciones de optimalidad de primer orden:

En primer lugar se presenta una condición de optimalidad que depende sólo de la geometría del conjunto admisible  $\Omega$ .

*Supongamos que  $x^*$  es una solución local de (OCR) entonces:*

$$\nabla f(x^*)^t d \geq 0, \quad \forall d \in \mathcal{T}(x)$$

Utilizando este resultado y el lema de Farkas, se demuestra el siguiente resultado:

*Supongamos que  $x^*$  es una solución local de (OCR) y que se verifica en  $x^*$  la hipótesis anterior de cualificación de restricciones. Entonces existe un vector de multiplicadores de Lagrange  $\lambda^*$ , con componentes  $\lambda_i^*$ ,  $1 \leq i \leq m_I + m_D$ , tal que se satisfacen las siguientes condiciones en  $(x^*, \lambda^*)$ :*

$$\nabla_x \ell(x^*, \lambda^*) = 0$$

$$c_i(x^*) = 0, \quad 1 \leq i \leq m_I$$

$$c_i(x^*) \leq 0, \quad m_I + 1 \leq i \leq m_I + m_D$$

$$\lambda_i^* \geq 0, \quad m_I + 1 \leq i \leq m_I + m_D$$

$$\lambda_i^* c_i(x^*) = 0, \quad 1 \leq i \leq m_I + m_D$$



- Estas condiciones son conocidas como las condiciones de [Karush-Kuhn-Tucker](#) o condiciones [KKT](#).
- La última condición se llama [condición de complementareidad](#) e implica que los multiplicadores de Lagrange correspondientes a restricciones inactivas son cero.
- Un caso especial de complementareidad es el de la **complementareidad estricta**:

*Dada una solución local  $x^*$  del problema (OCR) y un vector  $\lambda^*$  verificando las condiciones de optimalidad de primer orden decimos que se satisface la condición de complementareidad estricta si,*

*o bien  $\lambda_i^*$  o bien  $c_i(x^*)$  es cero para cada índice  $i$ ,  $m_I + 1 \leq i \leq m_I + m_D$ .*

*En otras palabras, se tiene que  $\lambda_i^* > 0$  para cada restricción de desigualdad activa.*

Esta propiedad hace más fácil a los algoritmos determinar el conjunto activo en el óptimo y por tanto se acelera la convergencia.

Otras condiciones de optimalidad que no necesitan la hipótesis de cualificación son las condiciones de optimalidad de Fritz John:

Supongamos que  $x^*$  es una solución local de (OCR). Entonces existe un escalar  $\lambda_0^* \geq 0$  y un vector de multiplicadores de Lagrange  $\lambda^*$ , con componentes  $\lambda_i^*$ ,  $1 \leq i \leq m_I + m_D$ , tal que se satisfacen las siguientes condiciones en  $(x^*, \lambda^*)$ :

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m_I+m_D} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*) = 0$$

$$c_i(x^*) = 0, \quad 1 \leq i \leq m_I$$

$$c_i(x^*) \leq 0, \quad m_I + 1 \leq i \leq m_I + m_D$$

$$\lambda_i^* \geq 0, \quad m_I + 1 \leq i \leq m_I + m_D$$

$$\lambda_i^* c_i(x^*) = 0, \quad 1 \leq i \leq m_I + m_D$$

$$\sum_{i=0}^{m_I+m_D} \lambda_i^{*2} > 0$$

EJEMPLO:

La solución  $x = (-1, -1)^t$  del problema

$$(\mathcal{EJ}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) = x_1 + x_2 \\ \text{verificando} \\ c_1(x) = (x_1^2 + x_2^2 - 2)^2 = 0 \end{array} \right.$$

no satisface las condiciones KKT ( $\nabla f(x) + \lambda_1 \nabla c_1(x) = 0$  no es cierta en ese punto, pues  $\nabla c_1(-1, -1) = 0$ ) pero sí las de Fritz John (basta elegir  $\lambda_0^* = 0$ ).

Figura 1: Ejemplos de problemas de minimización donde  $\lambda_0^* = 0$  en las condiciones de Fritz John

## Sensibilidad

En esta sección analizamos el [significado intuitivo de los multiplicadores de Lagrange](#).

- El valor de cada multiplicador de Lagrange  $\lambda_i^*$  nos informa de la sensibilidad del valor óptimo de la función objetivo  $f(x^*)$  respecto a la presencia de la restricción  $c_i$ .
- Cuando se elige una restricción inactiva  $i \notin \mathcal{A}(x^*)$  tal que  $c_i(x^*) < 0$ , la solución  $x^*$  y el valor de la función  $f(x^*)$  son bastante indiferentes al hecho de que la restricción esté presente o no. Si perturbamos  $c_i$  con una minúscula cantidad seguirá siendo inactiva y  $x^*$  seguirá siendo una solución local del problema de optimización perturbado. Como en este caso  $\lambda_i^* = 0$  el multiplicador de Lagrange indica que la restricción no es significativa.
- Supongamos que, por el contrario, la restricción  $c_i$  sea activa y que perturbamos un poco exigiendo por ejemplo que  $c_i(x) \leq \epsilon \|\nabla c_i(x^*)\|$  en vez de  $c_i(x) \leq 0$ . Supongamos que  $\epsilon$  es suficientemente pequeño y que la solución perturbada  $x^*(\epsilon)$  todavía tiene el mismo conjunto de restricciones activas y que los multiplicadores de Lagrange no son muy afectados por la perturbación. Se obtiene entonces que la familia de soluciones  $x^*(\epsilon)$  satisface:

$$\frac{df(x^*(\epsilon))}{d\epsilon} = -\lambda_i^* \|\nabla c_i(x^*)\|$$

Un análisis de sensibilidad del problema concluirá que si  $\lambda_i^* \|\nabla c_i(x^*)\|$  es grande, entonces el valor óptimo es sensible a la definición de la  $i$ -ésima restricción, mientras que si esa cantidad es pequeña la dependencia no es demasiado fuerte.

## Condiciones de optimalidad de segundo orden

Dado un punto  $x$  y el conjunto de direcciones admisibles linealizadas  $\mathcal{F}(x)$  y un vector de multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  verificando las condiciones KKT, se define el **cono crítico**  $\mathcal{C}(x, \lambda)$  como:

$$\mathcal{C}(x, \lambda) = \{w \in \mathcal{F}(x) / \nabla c_i(x)^t w = 0, \\ i \in \mathcal{A}(x) \cap \{1 + m_I, \dots, m_I + m_D\} \text{ con } \lambda_i > 0\}$$

El cono crítico contiene las direcciones de  $w \in \mathcal{F}(x)$  para las que

$$w^t \nabla f(x) = 0$$

pues de las condiciones KKT se deduce:

$$w^t \nabla f(x) = - \sum_{i=1}^{m_I+m_D} \lambda_i w^t \nabla c_i(x) = 0$$

por definición de  $\mathcal{C}(x, \lambda)$  y porque  $\lambda_i = 0$  si  $i$  es una restricción de desigualdad inactiva. Por tanto, con información sobre las derivadas de primer orden no sabemos si a lo largo de las direcciones del cono crítico la función coste crece o decrece.

- Las condiciones de segundo orden examinan los términos correspondientes a la segunda derivada en las expansiones en serie de Taylor de las funciones  $f$  y  $c_i$  para ver si esta información extra indica si la función  $f$  crece o decrece.

- Como vamos a considerar derivadas de segundo orden, haremos hipótesis de regularidad más fuertes. Supondremos que  $f$  y  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, m_I + m_D$  son dos veces continuamente diferenciables.

## CONDICIONES NECESARIAS DE SEGUNDO ORDEN:

*Supongamos que  $x^*$  es una solución local de (OCR) y que se verifica en  $x^*$  la hipótesis de cualificación de restricciones. Sea  $\lambda^*$  un vector de multiplicadores de Lagrange que satisfacen las condiciones KKT. Entonces*

$$w^t \nabla_{xx} \ell(x^*, \lambda^*) w \geq 0, \quad \forall w \in \mathcal{C}(x^*, \lambda^*)$$

Las **condiciones suficientes** son condiciones sobre  $f$  y  $c_i$  que aseguran que  $x^*$  es una solución local del problema ( $OCR$ ).

### CONDICIONES SUFICIENTES DE SEGUNDO ORDEN:

*Supongamos que para algún punto admisible  $x^* \in \mathbb{R}^n$  existe un vector de multiplicadores de Lagrange  $\lambda^*$  tal que se satisfacen las condiciones KKT. Supongamos también que*

$$w^t \nabla_{xx} \ell(x^*, \lambda^*) w > 0, \quad \forall w \in \mathcal{C}(x^*, \lambda^*), \quad w \neq 0$$

*Entonces,  $x^*$  es una solución local estricta para ( $OCR$ ).*



## Programas convexos

Los problemas de **programación convexa** son problemas de optimización con restricciones en los que la función objetivo  $f$  es una función convexa y el conjunto admisible  $\Omega$  es un conjunto convexo.

En el caso convexo las soluciones locales son también soluciones globales y el conjunto de mínimos globales es convexo. Los problemas de programación convexa se reconocen frecuentemente por las propiedades algebraicas de las funciones  $c_i$ .

*Una condición suficiente para que la región admisible  $\Omega$  definida por las restricciones en (OCR) sea convexa es que las funciones  $c_i$  sean lineales para  $i = 1, \dots, m_I$  y convexas para  $i = m_I + 1, \dots, m_D$ .*

## Programación lineal:

Es la optimización de una función lineal sujeta a restricciones de igualdad o desigualdad lineales.

### Formas canónicas:

Los programas lineales se expresan generalmente de dos maneras:

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{L}}) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^t x \\ \text{verificando } Ax \leq b, x \geq 0 \end{cases}$$

o bien,

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{L}}) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^t x \\ \text{verificando } Ax = b, x \geq 0 \end{cases}$$

donde  $A \in M_{m \times n}$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ .

Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para el problema  $(\mathcal{P}_{\mathcal{L}})$  con restricciones de igualdad son:

$$(\mathcal{KKT}) \begin{cases} A^t \lambda + s = c \\ Ax = b \\ x_i s_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \\ x \geq 0 \\ s \geq 0 \end{cases}$$

## Aplicación de la programación lineal

### *(Problema de flujo de red)*

Se considera una red de transporte (sistema de oleoductos, autopista, comunicación, ...) a través de la que se desea enviar una mercancía homogénea (petróleo, coches, mensajes, ...) desde ciertos puntos de la red, llamados nodos fuente, a otros puntos de destino de la red, llamados nodos sumidero. Además de los nodos fuente y los nodos sumidero, la red puede contener nodos intermedios, donde no hay entrada ni salida de la mercancía. Se denota el flujo del nodo  $i$  al nodo  $j$  por  $x_{ij}$  (positivo en la dirección  $i \rightarrow j$ , y negativo en otro caso).

Los principales elementos del problema de flujo de red son:

#### 1. Datos:

$\mathcal{G}$ : El grafo  $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, \mathcal{N})$  que define la red de transporte, donde  $\mathcal{N}$  es el conjunto de nodos y  $\mathcal{A}$  el conjunto de enlaces

$n$ : número de nodos de la red

$f_i$ : el flujo de entrada (positivo) o de salida (negativo) en el nodo  $i$

$m_{ij}$ : capacidad máxima de flujo del enlace que va del nodo  $i$  al nodo  $j$

$c_{ij}$ : coste de enviar una unidad del nodo  $i$  al nodo  $j$

2. Variables:

$x_{ij}$ : flujo que va del nodo  $i$  al nodo  $j$ .

3. Restricciones:

- En cada nodo  $i$  el flujo entrante equilibra al saliente. Esto se traduce en:

$$\sum_{\{j / (i,j) \in \mathcal{A}\}} x_{ij} - \sum_{\{j / (j,i) \in \mathcal{A}\}} x_{ji} = f_i, \quad \forall i \in \mathcal{N}$$

- Restricciones de capacidad:

$$-m_{ij} \leq x_{ij} \leq m_{ij}, \quad \forall i < j$$

4. Función coste:

Se minimiza el coste total del transporte:

$$Z = \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij}$$

## Programación lineal. Definiciones básicas

Un conjunto  $C$  es *convexo* si para dos puntos cualesquiera  $x', x'' \in C$ , todos los puntos de la forma  $x(\lambda) = \lambda x' + (1 - \lambda)x'' \in C$ , para  $\lambda \in [0, 1]$ .

Se dice que  $x$  es *combinación convexa* de  $x_1, \dots, x_N$  si  $x = \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i$ , donde  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$  con  $\lambda_i \geq 0, \forall i$ .

Un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  es un *cono* si para cualquier punto  $x \in C$  y cualquier escalar no negativo  $\lambda$ , se verifica  $\lambda x \in C$ .

**Ejemplo:**  $\{y \in \mathbb{R}^m : y = A\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha \geq 0, \}$  es el cono convexo generado por las columnas de  $A$ .

Un *punto extremo* de un conjunto convexo  $C$  es un punto  $x \in C$  que no puede expresarse como combinación convexa de, al menos, otros dos puntos de  $C$ .

El conjunto  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^t x = \beta\}$  donde  $a \neq 0$  y  $\beta \in \mathbb{R}$  es un *hiperplano*.

El conjunto  $\bar{H} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^t x \leq \beta\}$  donde  $a \neq 0$  y  $\beta \in \mathbb{R}$  es un *semiespacio cerrado*.

El hiperplano  $H$  asociado al semiespacio  $\bar{H}$  se llama *hiperplano frontera* para el semiespacio.

El vector  $a$  de la definición anterior es ortogonal al hiperplano  $H$  y se llama *normal del hiperplano* (está dirigido al exterior de este).

Un conjunto  $S_a \subset \mathbb{R}^n$  es un *conjunto afín* si para dos puntos cualesquiera  $x', x'' \in S_a$ , todos los puntos de la forma  $x(\lambda) = \lambda x' + (1 - \lambda)x''$  con  $-\infty < \lambda < \infty$  están en  $S_a$ .

Un conjunto afín  $S_a$  es simplemente un subespacio lineal trasladado por un vector.

Un *poliedro convexo* es un conjunto formado por la intersección de un número finito de semiespacios cerrados. Si además es no vacío y acotado se llama *polígono convexo*.

Los semiespacios y los hiperplanos son convexos. Así, como la intersección de convexos es convexa, los poliedros son, en efecto, conjuntos convexos.

El conjunto de soluciones admisibles de un problema de programación lineal, que se define como  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ , es un poliedro convexo.

Los vértices de un poliedro convexo  $P$  son los puntos extremos de  $P$ .

**Puntos extremos y soluciones básicas admisibles** Notaremos en lo que sigue:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$$

*Un punto  $x \in P$  es un vértice de  $P$  si y sólo si las columnas de  $A$  que corresponden a las componentes positivas ( $> 0$ ) de  $x$  son linealmente independientes.*

Sea  $B$  una matriz  $m \times m$  no singular compuesta por  $m$  columnas linealmente independientes de  $A$ . Si todas las componentes de  $x$  no asociadas con las columnas de  $B$ , llamadas variables no básicas, se hacen iguales a cero y el conjunto de ecuaciones lineales  $Ax = b$  se resuelve para las restantes componentes de  $x$ , llamadas variables básicas, entonces el  $x$  resultante se llama *solución básica* respecto a la base  $B$ .

Si hacemos las variables no básicas iguales a cero tenemos un sistema de  $m$  ecuaciones



con  $m$  incógnitas que se resuelve de manera única para las variables de base  $x_B$ :

$$Bx_B = b$$

Cuando  $A$  no tiene rango máximo en filas o bien el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución y  $P$  es vacío o bien alguna de las ecuaciones del sistema es redundante. En este caso las restricciones redundantes se pueden eliminar una por una para dar un sistema de ecuaciones reducido y una matriz de restricciones de rango máximo en filas.

Una solución básica  $x$  con respecto a una base  $B$  se dice *admisibile* si es no negativa ( $\geq 0$ ).

Se deduce de lo anterior que un punto  $x \in P$  es un vértice si y sólo si  $x$  es una solución básica admisible correspondiente a alguna base  $B$ . En consecuencia el poliedro  $P$  tiene sólo un número finito de vértices.

Una *dirección* de  $P$  es un vector  $d \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \neq 0$ , tal que para cualquier  $x_0 \in P$ , el rayo:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = x_0 + \lambda d, \lambda \geq 0\}$$

está enteramente en  $P$ .

Por tanto,  $P$  no acotado si y sólo si  $P$  tiene una dirección.

### **Teorema de representación:**

*Cualquier  $x \in P$  puede representarse de la forma  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i + d$ , donde  $\{v_i, i \in I\}$  es el conjunto de vértices de  $P$ ,  $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ ,  $\lambda_i \geq 0, \forall i \in I$ , y, o bien  $d$  es una dirección de  $P$  o bien  $d = 0$ .*

Si  $P$  es acotado (es decir, es un polígono) entonces cualquier  $x \in P$  puede representarse como combinación convexa de sus vértices.

## Resultados fundamentales de programación lineal

*Si  $P$  es no vacío tiene al menos un vértice.*

*Si  $P$  es no vacío, entonces el mínimo valor de  $z = c^t x$  para  $x \in P$  se alcanza en un vértice de  $P$  o  $z$  no tiene cota inferior en  $P$ .*

Este resultado es fundamental para resolver problemas de programación lineal. Muestra que sólo necesitamos considerar vértices de  $P$  como candidatos a la solución óptima.

El método del simplex. (Dantzig, 1947)

Para resolver el problema de programación lineal:

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{L}}) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} z = c^t x \\ \text{verificando } Ax = b, x \geq 0 \end{cases}$$

necesitamos sólo considerar los vértices del poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$  de soluciones admisibles como candidatos a la solución óptima.

#### MOTIVACIÓN GEOMÉTRICA:

La idea es sencilla: Primero se encuentra un vértice en  $P$ . Después el método procede vértice a vértice a lo largo de todas las aristas que se “inclinan hacia abajo respecto a la función objetivo  $z = c^t x$  generando una sucesión de vértices con valores de la función objetivo estrictamente decrecientes. En un número finito de pasos se encuentra un vértice óptimo o una arista en la que  $z$  va a  $-\infty$ .

Vamos a describir ahora la segunda fase del método del simplex: (es decir, suponemos conocido un vértice de  $P$ ).

## DESCRIPCIÓN DE UN PASO DEL MÉTODO :

Supondremos que las filas de  $A$  son linealmente independientes, es decir, el rango de  $A$  es  $m \leq n$ . Esto permite asegurar que puede formarse una base  $B$  a partir de las columnas de  $A$ . Por simplicidad supondremos que las componentes del vértice  $x$  en el que estamos (vértice actual), están ordenadas de manera que las  $m$  primeras son básicas:

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

con  $A = (B \ N)$  y  $c^t = (c_B^t \ c_N^t)$ .

Si una o más variables básicas son cero entonces tal solución básica se llama *degenerada*.

Definimos la *matriz de restricciones activas*:

$$M = \begin{pmatrix} B & N \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$M$  es no singular pues  $B$  es no singular.

Si la solución básica admisible es no degenerada entonces está en la intersección de  $m$  hiperplanos asociados a las restricciones de igualdad  $Ax = b$  y  $n - m$  hiperplanos co-

respondientes al requerimiento de que las  $n - m$  variables no básicas sean cero, es decir:  $x_N = 0$ .

Si la solución básica admisible es degenerada alguna de las variables básicas  $x_B$  son cero y así hay más de  $n - m$  restricciones de no negatividad que se satisfacen como igualdad. De esta forma  $x$  verifica más de  $n$  ecuaciones y en consecuencia puede haber un número enorme de bases asociadas a  $x$ .

Suponemos, la solución básica admisible **no degenerada**:

Esto significa que hay  $n - m$  aristas de  $P$  emanando del vértice. Las direcciones de estas aristas están dadas por las  $n - m$  últimas columnas de la inversa de la matriz de restricciones activas  $M$ .

Moverse en una de estas aristas significa incrementar una de las variables no básicas mientras el resto de las variables no básicas se mantienen iguales a cero.

El vector

$$\eta_q = M^{-1}e_q = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}N \\ 0 & I \end{pmatrix} e_q = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_q \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

( $q$ -ésima columna de  $M^{-1}$ ) es paralelo a la intersección de los  $n - 1$  hiperplanos linealmente independientes correspondientes a  $Ax = b$  y  $x_k = 0$ ,  $k > m$ ,  $k \neq q$ .

En consecuencia,  $\eta_q$  es una *dirección admisible* ya que para  $\theta$  pequeño :

$$x(\theta) = x + \theta\eta_q$$

es un punto admisible, pues :

$$x_k(\theta) = 0, \quad k > m, k \neq q$$

$$x_q(\theta) = \theta$$

$$x_B(\theta) = x_B - \theta B^{-1}a_q \geq 0$$

donde  $a_q$  es la columna  $q$ -ésima de  $A$ .

Ahora tenemos que buscar  $\eta_q$  que nos dé una dirección de descenso. Para ello vamos a definir los costes reducidos como:

$$s_j = c^t \eta_j = c_j - c_B^t B^{-1} a_j, \quad j > m.$$

Si  $s_j < 0$ , el gradiente de  $z = c^t x$  forma un ángulo obtuso con  $\eta_j$  y por tanto  $z$  decrece al movernos a lo largo de esa dirección para  $\theta$  creciente.

La norma usual para elegir la arista de descenso es elegir la que haga más negativo el coste reducido correspondiente. Esta elección no es la de mayor descenso respecto a  $z$ , pues esa sería  $\eta_q$  tal que:

$$\frac{c^t \eta_q}{\|\eta_q\|_2} = \min_{j > m} \frac{c^t \eta_j}{\|\eta_j\|_2}$$

Si definiésemos los costes reducidos, para las variables básicas serían cero y los correspondientes a las variables no básicas se calculan de la forma siguiente:

$$\Pi^t = c_B^t B^{-1} \quad (\text{multiplicadores})$$

$$s_j = c_j - \Pi^t a_j, \quad j > m.$$



*Dada una solución básica admisible  $x$  cada punto  $y \in P$  puede expresarse como:*

$$y = x + \sum_{j=m+1}^n y_j \eta_j, \quad y_j \geq 0, \quad j > m,$$

*con  $\eta_j$  la  $j$ -ésima columna de  $M^{-1}$ .*

Como consecuencia de esto se tiene:

$$z(y) - z(x) = c^t(y - x) = \sum_{j=m+1}^n (c^t \eta_j) y_j = \sum_{j=m+1}^n s_j y_j, \quad \forall y \in P.$$

Como  $y$  es no negativo si los costes reducidos fuesen no negativos se tendría que  $z(y) \geq z(x)$ ,  $\forall y \in P$ , y como consecuencia:

*Una solución básica admisible es solución óptima del problema de programación lineal si todos los costes reducidos son no negativos.*

En el caso no degenerado el inverso de este resultado es cierto. Sin embargo, una solución básica degenerada puede ser óptima incluso con costes reducidos negativos pues las correspondientes direcciones de descenso pueden no ser admisibles.

Una solución básica admisible es la única solución óptima si todos los costes básicos reducidos son estrictamente positivos.

Si  $x$  es una solución básica admisible óptima con costes no básicos reducidos  $s_{j_1} = \dots = s_{j_k} = 0$  entonces cualquier punto de la forma

$$y = x + \sum_{i=1}^k y_{j_i} \eta_{j_i}$$

es también óptimo.

Una vez elegida una dirección de descenso  $\eta_q$  la siguiente iteración del método del simplex lleva el vértice dado al vértice adyacente que se encuentra sobre la dirección de descenso. Esto se obtiene incrementando la variable no básica  $x_q$ , es decir aumentando  $\theta$  en

$$x(\theta) = x + \theta \eta_q$$

hasta que una de las variables básicas se haga cero. Eligiendo  $\omega = B^{-1}a_q$  entonces:

$$x(\theta) \geq 0 \quad \text{si y sólo si} \quad x_B(\theta) = x_B - \theta \omega \geq 0$$

De esta forma, se tiene:

Si  $s_q$  es negativo y  $\omega$  es no positivo, entonces el problema de programación lineal no está acotado,  $x(\theta)$  es admisible para  $\theta \geq 0$  y  $z(x(\theta)) \rightarrow -\infty$  si  $\theta \rightarrow \infty$ . En este caso  $d = \eta_q$  es una dirección con  $c^t d = s_q < 0$ .

Si  $\omega$  tiene una componente positiva, el mayor  $\theta$  que pueda tomarse manteniendo  $x(\theta) \geq 0$  y la variable básica  $x_p$  que se hace cero cuando  $\theta$  crece se determinan por el test:

$$\theta = \bar{x}_q = \min\left\{\frac{x_i}{\omega_i}, \omega_i > 0, 1 \leq i \leq m\right\} = \frac{x_p}{\omega_p}$$

$\bar{x}_q$  indica que este es el nuevo valor de la  $q$ -ésima variable en el nuevo vértice.

## ALGORITMO DEL SIMPLEX:

1. Sea una solución básica admisible  $x_B$  correspondiente a la matriz base  $B = (a_{j_1} \dots a_{j_m})$ .  
Sea  $\mathcal{B} = \{j_1, \dots, j_m\}$  el conjunto de índices de las variables básicas.

2. Calculamos los multiplicadores del simplex resolviendo:

$$B^t \Pi = c_B$$

para  $\Pi$  y calculamos los costes reducidos correspondientes a las variables no básicas:

$$s_j = c_j - \Pi^t a_j \quad \forall j \notin \mathcal{B}$$

3. Comprobamos si la solución es óptima:

Si  $s_j \geq 0 \quad \forall j \notin \mathcal{B}$  STOP, la solución es óptima. En otro caso, vamos al paso siguiente.

4. Determinamos la variable no básica  $x_q$  que debe entrar en la base, es decir buscamos la arista de descenso:

$$q \in V = \{j \notin \mathcal{B} : s_j < 0\}$$

5. Comprobamos si hay un rayo no acotado. Para ello calculamos  $\omega$  resolviendo

$$B\omega = a_q$$

Si  $\omega \leq 0$  STOP: existe un rayo de soluciones admisibles con  $z \rightarrow -\infty$ . En otro caso, vamos al paso siguiente.

6. Determinamos la variable básica  $x_{j_p}$  para cambiar la base; para ello calculamos:

$$\theta = \frac{x_{j_p}}{\omega_p} = \min\left\{\frac{x_{j_i}}{\omega_i}, \omega_i > 0, \right\}$$

7. Actualizamos la solución y la matriz de la base  $B$ :

$$\begin{aligned}x_q &\leftarrow \theta = \frac{x_{j_p}}{\omega_p} \\x_{j_i} &\leftarrow x_{j_i} - \theta\omega_i \quad 1 \leq i \leq m \\B &\leftarrow B \cup \{q\} \setminus \{j_p\}\end{aligned}$$

EJEMPLO:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad f(x) = -5x_1 - 6x_4 - 9x_5, \\ \text{sujeto a} \quad x_1 + x_2 + 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ \quad \quad \quad x_1 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3, \\ \quad \quad \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{array} \right.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Vamos a desarrollar una única iteración del método del simplex comenzando con  $\mathcal{B} = \{5, 4\}$ ,  $\mathcal{N} = \{2, 1, 3\}$ . Entonces

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las componentes no básicas de  $x$  deben ser cero y las componentes básicas deben satis-

facier:

$$Bx_B = b$$

$$\text{Por tanto } x_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ y } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dividimos  $c$  en variables básicas y no básicas:

$$c_B = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}, c_N = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos los multiplicadores del simplex  $\Pi$ , resolviendo  $B^t\Pi = c_B$ , entonces  $\Pi =$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Los costes reducidos son:

$$s_N = c_N - N^t\Pi = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

De esta forma entra en la base el índice 2 correspondiente a un coste reducido negativo.

Vemos ahora qué variable sale de la base, para ello resolvemos

$$B\omega = a_2$$

entonces  $\omega = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Como sólo la segunda componente de  $\omega$  es positiva, saldrá el segundo índice de la base, es decir, sale la variable  $x_4$ .

De esta forma los nuevos conjuntos básico y no básico serán:  $\mathcal{B} = \{5, 2\}$ ,  $\mathcal{N} = \{4, 1, 3\}$  y

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia  $x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  y la solución es  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{2}{2} \end{pmatrix}$



Métodos para la obtención de un punto admisible:

Método de variables artificiales

Se plantea el problema de encontrar una solución básica admisible para las restricciones:

$$Ax = b, \quad x \geq 0$$

Se introducen las variables artificiales  $r = (r_i)_{i=1}^m$  de forma que

$$r = Ax - b$$

En el método de variables artificiales se supone que  $b \geq 0$  (basta cambiar en  $A$  y en  $b$  el signo de la fila para la que  $b_i < 0$ ). Entonces se resuelve el problema auxiliar:

$$(\mathcal{PA}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{(x,r) \in \mathbb{R}^{n+m}} \sum_{i=1}^m r_i \\ \text{verificando} \\ Ax + r = b, \\ x \geq 0 \\ r \geq 0 \end{array} \right.$$

- Si  $(x^*, r^*)$  son óptimos, entonces cuando  $r^* = 0$ ,  $x^*$  es un punto admisible. Si  $r^* \neq 0$  no existe punto admisible.
- El problema  $(\mathcal{PA})$  es un programa lineal en el que la matriz de coeficientes es de la forma  $(A \mid I)$  y el vector coste es de la forma  $(0, e)^t$  donde  $e = (1, \dots, 1)$ .
- Una solución básica inicial para este problema es  $r^{(1)} = b$ ,  $x^{(1)} = 0$  y así la matriz base inicial es  $B^{(1)} = I$  y esto es el punto de partida para la aplicación del método del simplex.
- Durante el cálculo puede ocurrir que la variable artificial  $r_i$  se haga no básica (i.e.  $r_i = 0$ ) y de esta forma se satisface la restricción  $(Ax - b)_i = 0$ . Como no debe ocurrir que  $r_i$  vuelva a ser básica puede eliminarse del cálculo y disminuir el esfuerzo computacional.

EJEMPLO:

Se busca una solución básica admisible para el problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, \\ \text{sujeto a} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ \quad \quad \quad x_1 + x_3 - 3x_4 = \frac{1}{2}, \\ \quad \quad \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right.$$

Sean las variables artificiales  $r_1$  y  $r_2$  a las que llamamos  $x_5$  y  $x_6$ . El problema ( $\mathcal{PA}$ ) es en este caso:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad f(x) = x_5 + x_6 \\ \text{sujeto a} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ \quad \quad \quad x_1 + x_3 - 3x_4 + x_6 = \frac{1}{2}, \\ \quad \quad \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{array} \right.$$

La matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una solución básica admisible para el problema es:

$$\mathcal{B} = \{5, 6\}, \quad \mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = I, \quad \begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = B^{-1}b = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$s_N = (-2, -1, -2, 2)^t$$

y, en consecuencia se elige  $x_1$  para crecer y se calcula  $\omega = (1, 1)^t$  de manera que tanto  $x_5$  como  $x_6$  se reducen pero  $x_6$  alcanza el cero antes. De esta forma  $x_1$  se hace básica:

$$x_1 = \theta = \frac{x_6}{\omega_2} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

y  $x_6$  no básica:

$$x_6 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Como la variable  $x_6$  es artificial puede eliminarse y se resuelve un problema más pequeño con:

$$\mathcal{B} = \{1, 5\}, \quad \mathcal{N} = \{2, 3, 4\}$$

Haciendo los cálculos se ve que  $x_4$  crece y  $x_5$  se va a cero y en consecuencia  $x_4$  se hace básica y  $x_5$  sale de la base. Una vez eliminadas las variables artificiales se obtiene la solución

admisible para el problema inicial:

$$\mathcal{B} = \{1, 4\}, \quad \mathcal{N} = \{2, 3\}$$

con  $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t = \left(\frac{7}{8}, 0, 0, \frac{1}{8}\right)$ .

Otra técnica de cálculo de una solución admisible

Este método (Wolfe), permite variables negativas en la base.

El problema auxiliar en el paso  $k$ -ésimo se define como:

$$(\mathcal{PA}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{(x,r) \in \mathbb{R}^{n+m}} \sum_{i: x_i^{(k)} < 0} -x_i + \sum_{i: r_i^{(k)} < 0} -r_i + \sum_{i: r_i^{(k)} > 0} r_i \\ \text{verificando} \\ Ax + r = b, \\ x_i \geq 0, \text{ para } i \text{ tal que } x_i^{(k)} > 0 \end{array} \right.$$

## Métodos de puntos interiores

En la década de 1980 se descubrió que un gran número de problemas de programación lineal podía abordarse eficientemente formulándolos como problemas no lineales y resolviéndolos con diversas modificaciones de algoritmos no lineales tales como el método de Newton. Una característica de estos métodos es que en ellos todos los iterantes deben satisfacer las restricciones de desigualdad en el problema de manera estricta y por eso son conocidos como *métodos de puntos interiores*. Hacia 1990 los métodos primales-duales de puntos interiores se han distinguido como los más eficientes en la práctica y como competidores del método del simplex sobre problemas de gran tamaño.

Los métodos de puntos interiores comparten propiedades comunes que los distinguen del método del simplex:

- Cada iteración de un método de puntos interiores es costosa y puede suponer un significativo avance hacia la solución mientras que el método del simplex requiere usualmente un elevado número de iteraciones baratas.
- El método del simplex calcula siempre iterantes sobre la frontera del polítopo admisible hasta encontrar un óptimo. Los métodos de puntos interiores se aproximan a la frontera del conjunto admisible sólo en el límite.

## Métodos primales duales

Consideramos un problema de programación lineal escrito en la forma canónica:

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{L}}) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^t x \\ \text{verificando } Ax = b, x \geq 0 \end{cases}$$

donde  $A \in M_{m \times n}$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ .

A este problema le asociamos la lagrangiana:

$$\ell(x, \lambda, s) = c^t x + \lambda^t (b - Ax) - s^t x$$

El problema  $(\mathcal{P}_{\mathcal{L}})$  se interpreta como

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m, s \in \mathbb{R}_+^n} \ell(x, \lambda, s)$$

El problema dual se obtiene invirtiendo el orden en la maximización/minimización:

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^m, s \in \mathbb{R}_+^n} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \ell(x, \lambda, s)$$

Después del cálculo se comprueba que el problema dual es lineal y tiene por expresión:

$$(\mathcal{P}_D) \begin{cases} \min_{\lambda \in \mathbb{R}^m} -b^t \lambda \\ \text{verificando } A^t \lambda + s = c, \quad s \geq 0 \end{cases}$$

Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para el problema  $(\mathcal{P}_L)$  caracterizan las soluciones primales-duales de los problemas anteriores:

$$(\mathcal{KKT}) \begin{cases} A^t \lambda + s = c \\ Ax = b \\ x_i s_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \\ x \geq 0 \\ s \geq 0 \end{cases}$$

Los métodos primales-duales encuentran soluciones  $(x^*, \lambda^*, s^*)$  de este sistema aplicando variantes del método de Newton a las tres igualdades en el sistema  $(\mathcal{KKT})$  y modificando las direcciones de búsqueda y las longitudes de paso de manera que las desigualdades  $x \geq 0$ ,  $s \geq 0$  se satisfagan estrictamente en cada iteración.

Para derivar métodos primales-duales reescribimos las condiciones  $(\mathcal{KKT})$  de forma distinta utilizando una aplicación  $F : \mathbb{R}^{2n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+m}$ ,



$$F(x, \lambda, s) = \begin{bmatrix} A^t \lambda + s - c \\ Ax - b \\ XSe \end{bmatrix} = 0$$

$$x \geq 0, \quad s \geq 0$$

donde  $X = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n)$  y  $e = (1, 1, \dots, 1)^t$ .

Los métodos primales-duales generan iterantes  $(x^k, \lambda^k, s^k)$  de este sistema que satisfacen las cotas exactamente, es decir,  $x^k > 0$  y  $s^k > 0$ .

Muchos métodos de puntos interiores exigen que todos los iterantes sean estrictamente admisibles, esto es cada  $(x^k, \lambda^k, s^k)$  debe satisfacer las restricciones lineales de igualdad para los problemas primal y dual. Si definimos el conjunto admisible primal-dual  $\mathcal{F}$  y el conjunto estrictamente admisible  $\mathcal{F}_0$  como:

$$\mathcal{F} = \{(x, \lambda, s), Ax = b, A^t \lambda + s = c, x \geq 0, s \geq 0\}$$

$$\mathcal{F}_0 = \{(x, \lambda, s), Ax = b, A^t \lambda + s = c, x > 0, s > 0\}$$

la condición de admisibilidad estricta puede escribirse de manera más simple:

$$(x^k, \lambda^k, s^k) \in \mathcal{F}_0$$

Como la mayoría de los algoritmos iterativos en optimización, los métodos de puntos interiores primales-duales tienen dos ingredientes básicos:

- un procedimiento para determinar la dirección de búsqueda
- una medida de cómo de deseable es cada punto en el espacio de búsqueda

Como ya se dijo, el procedimiento para encontrar la dirección de búsqueda tiene su origen en el método de Newton para ecuaciones no lineales. El método de Newton construye un modelo lineal para  $F$  alrededor del iterante actual y obtiene la dirección de búsqueda  $(\Delta x, \Delta \lambda, \Delta s)$  resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$J(x, \lambda, s) \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta s \end{bmatrix} = -F(x, \lambda, s)$$

donde  $J$  es el jacobiano de  $F$ . Si el punto actual es estrictamente admisible  $(x, \lambda, s) \in \mathcal{F}_0$ , las ecuaciones que dan el paso de Newton son:

$$\begin{bmatrix} 0 & A^t & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -XSe \end{bmatrix}$$

En general, un paso completo a lo largo de esta dirección no es aceptable pues podrían violarse las restricciones de cota. Para evitar esto se realiza una búsqueda de línea a lo largo de la dirección de Newton de manera que el nuevo iterante es

$$(x, \lambda, s) + \alpha(\Delta x, \Delta \lambda, \Delta s)$$

para algún parámetro  $\alpha \in (0, 1]$ . Sin embargo, con frecuencia, el paso permitido es mucho más pequeño que 1, y la dirección de Newton, conocida como dirección de escalado afín, no permite un progreso suficiente hacia la solución.

Los métodos primales-duales modifican el procedimiento básico de Newton en dos puntos importantes:

- Desvían la dirección de búsqueda hacia el interior del octante no negativo  $x \geq 0, s \geq 0$  de manera que se pueda avanzar más a lo largo de esa dirección antes de que una de las componentes de  $x$  o  $s$  se haga negativa.
- Evitan que las componentes de  $x$  y  $s$  se muevan muy cerca de la frontera del octante no negativo.

En lo que sigue se consideran esas modificaciones.

[El camino central](#)

El camino central  $\mathcal{C}$  es un arco de puntos estrictamente admisibles que juegan un papel fundamental en los algoritmos primales-duales. Se parametriza con un escalar  $\tau > 0$ , y cada punto  $(x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau) \in \mathcal{C}$  resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} A^t \lambda + s = c \\ Ax = b \\ x_i s_i = \tau \quad i = 1, \dots, n \\ x \geq 0 \\ s \geq 0 \end{cases}$$

Estas condiciones se diferencian del sistema ( $\mathcal{KKT}$ ) sólo en el término  $\tau$  del lado derecho. En lugar del cumplimiento de la condición de complementareidad se exige que los productos  $x_i s_i$  tengan el mismo valor para todos los índices  $i$ .

Se define entonces el camino central como

$$\mathcal{C} = \{(x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau), \tau > 0\}$$

Puede probarse que  $(x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau)$  está definido de manera única para cada  $\tau$  si y solo si  $\mathcal{F}_0$  es no vacío. Otro modo de definir  $\mathcal{C}$  es utilizando la aplicación  $F$ :

$$F(x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau e \end{bmatrix}$$

$$x \geq 0, \quad s \geq 0$$

Estas ecuaciones aproximan ( $\mathcal{KKT}$ ) cuando  $\tau$  tiende a cero. Si  $\mathcal{C}$  converge a algo cuando  $\tau \rightarrow 0$  por la derecha, debe hacerlo a una solución primal-dual del problema de programación lineal.

Para describir la dirección desviada de búsqueda, se introduce un parámetro de centralización  $\sigma \in [0, 1]$  y una medida de dualidad  $\mu$  definida por:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i s_i = \frac{x^t s}{n}$$

que mide el valor promediado de los productos  $x_i s_i$ . Escribiendo  $\tau = \sigma \mu$  y aplicando el método de Newton al sistema anterior se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & A^t & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -XSe + \sigma \mu e \end{bmatrix}$$

De esta forma el paso  $(\Delta x, \Delta \lambda, \Delta s)$  es un paso de Newton hacia el punto  $(x_{\sigma\mu}, \lambda_{\sigma\mu}, s_{\sigma\mu}) \in \mathcal{C}$  en el que los productos  $x_i s_i$  son todos iguales a  $\sigma\mu$ . Si  $\sigma = 1$  las ecuaciones anteriores definen una dirección de centralización, un paso de Newton hacia el punto  $(x_\mu, \lambda_\mu, s_\mu) \in \mathcal{C}$  para el que los productos  $x_i s_i$  son idénticos a  $\mu$ . Las direcciones de centralización están en general fuertemente desviadas hacia el interior del octante no negativo y progresan poco en la

reducción de la medida de dualidad. Sin embargo permiten un progreso significativo en la siguiente iteración. Por otro lado el valor  $\sigma = 0$  da el paso de Newton clásico, que es conocido como la dirección de escalado afín. Muchos algoritmos utilizan valores intermedios de  $\sigma$  para conseguir los dos objetivos: reducir  $\mu$  y mejorar la centralidad.

### Un algoritmo general primal-dual

Con los conceptos básicos vistos hasta el momento se puede definir un marco para los algoritmos primales-duales:

#### MÉTODO PRIMAL-DUAL

1. Elegir  $(x^0, \lambda^0, s^0) \in \mathcal{F}_0$ ,  $k = 0$ .
2. Test de convergencia
  - si se verifica, PARAR
  - si no se verifica, continuar
3. Resolver:

$$\begin{bmatrix} 0 & A^t & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^k \\ \Delta \lambda^k \\ \Delta s^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -X^k S^k e + \sigma_k \mu_k e \end{bmatrix}$$

donde  $\sigma_k \in [0, 1]$  y  $\mu_k = \frac{(x^k)^t s^k}{n}$

4. Elegir un paso  $\alpha_k > 0$  verificando  $x^{k+1} > 0$  y  $s^{k+1} > 0$ )
5. Hacer  $(x^{k+1}, \lambda^{k+1}, s^{k+1}) = (x^k, \lambda^k, s^k) + \alpha_k(\Delta x^k, \Delta \lambda^k, \Delta s^k)$ ,  $k = k + 1$  e ir a 2

Las elecciones del parámetro de centralización  $\sigma_k$  y del tamaño de paso  $\alpha_k$  son cruciales para el buen funcionamiento del algoritmo. Las técnicas para controlar esos parámetros dan lugar a una amplia variedad de métodos.

Hasta ahora se ha supuesto que el punto inicial es estrictamente admisible y, en particular, satisface las ecuaciones lineales  $A^t \lambda + s = c$  y  $Ax = b$ . Todos los iterantes siguientes también respetan estas restricciones gracias a los ceros del segundo miembro del sistema que da el paso de Newton. Sin embargo, para la mayoría de los problemas es difícil encontrar un punto inicial estrictamente admisible. Los métodos de puntos interiores inadmisibles exigen sólo que las componentes de  $x^0$  y  $s^0$  sean estrictamente positivas. La dirección de búsqueda debe ser modificada de manera que se mejore la admisibilidad y la centralidad en cada iteración, pero eso supone un pequeño cambio en el sistema de Newton, que quedará:

$$\begin{bmatrix} 0 & A^t & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c - A^t \lambda - s \\ b - Ax \\ -XSe + \sigma \mu e \end{bmatrix}$$



## Programación cuadrática:

Se estudian métodos para la minimización de una función cuadrática sujeta a restricciones de igualdad o desigualdad lineales:

$$(\mathcal{PQ}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2}x^t Hx + c^t x \\ \text{verificando} \\ a_i^t x \leq b_i, \quad 1 \leq i \leq m_D \\ a_i^t x = b_i, \quad m_D + 1 \leq i \leq m_D + m_I \end{array} \right.$$

donde  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz simétrica.

La dificultad en la resolución de un problema de programación cuadrática tiene gran dependencia de la naturaleza de la matriz  $H$ :

- En los problemas de programación cuadrática *convexa*, que son relativamente fáciles de tratar, la matriz  $H$  es **semidefinida positiva**.
- Sin embargo si  $H$  **tiene autovalores negativos** (programación cuadrática *no convexa*) la función objetivo puede tener más de un mínimo local. Un ejemplo es el siguiente

problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} -x^t x \\ \text{verificando} \\ -1 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

que tiene un mínimo en cualquier  $x$  con  $|x_i| = 1$  para  $i = 1, \dots, n$ .

## Caso estrictamente convexo: H definida positiva

### Restricciones de igualdad

Se considera el caso en que  $m_D = 0$  y llamamos  $m = m_I$ .

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  definida como  $A = (a_1 \mid \dots \mid a_m)$  y  $b \in \mathbb{R}^n$  definida como  $b = (b_i)$ .

Entonces las restricciones pueden escribirse de manera compacta como:

$$A^t x = b$$

Se supone que los vectores  $a_i$  son **linealmente independientes**.

*(En otro caso, o bien el sistema es incompatible y no existen puntos admisibles, o bien hay restricciones redundantes.)*

Entonces  $m \leq n$  y el rango de  $A$  es  $m$ . El caso  $n = m$  es trivial por tanto se supone  $m < n$ .

Sea  $\{z_j\}_{j=1}^{n-m}$  una base del núcleo de  $A^t$  y sea  $Z = (z_1 \mid \dots \mid z_{n-m})$ . Sea  $x_0$  un punto

admisibles. Entonces resolver el problema  $(\mathcal{PQ})$  equivale a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{d \in \mathbb{R}^n} f(x_0 + d) \\ \text{verificando} \\ A^t d = 0 \end{array} \right.$$

La restricción sobre  $d$  es su pertenencia al núcleo de  $A^t$  que es equivalente a asegurar la existencia de  $y \in \mathbb{R}^{n-m}$  tal que  $d = Zy$ . Por tanto el problema anterior puede escribirse como un problema cuadrático sin restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{y \in \mathbb{R}^{n-m}} f_0(y) = f(x_0 + Zy) = \frac{1}{2} y^t H_Z y + c_Z^t y + f(x_0) \end{array} \right.$$

donde  $H_Z = Z^t H Z$  y  $c_Z = Z^t(c + Hx_0)$ .

La solución  $d_Z$  de este problema (que existe y es única por ser  $H_Z$  definida positiva) se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones :

$$H_Z y = -c_Z$$

La solución del problema cuadrático original es entonces

$$\bar{x} = x_0 + Z d_Z$$

¿Cómo calcular  $Z$ ?

Se considera la descomposición  $QR$  de  $A$ :

$$A = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

con

$$Q = (Y \ S)$$

donde las columnas de  $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$  son una base ortonormal para el espacio generado por las columnas de  $A$  y las columnas de  $S \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$  son una base ortonormal para núcleo de  $A^t$ .

Elegimos entonces  $Z = S\tilde{I}$  con

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Otra aplicación de la factorización  $QR$  es que nos permite calcular un punto admisible  $x_0$ :

Se calcula  $y_0$  solución de  $R^t y_0 = b$ , entonces  $x_0 = Y y_0$  es admisible pues

$$A^t x_0 = \begin{pmatrix} R^t & 0 \end{pmatrix} Q^t Y y_0 = \begin{pmatrix} R^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^t \\ S^t \end{pmatrix} Y y_0 = R^t Y^t Y y_0 = R^t y_0 = b$$

*La utilización de la descomposición QR para obtener Z es adecuada si H y A no son de gran tamaño y son densas. Para matrices huecas de gran tamaño es mejor usar la factorización LU.*

## Restricciones generales

Si  $m_D > 0$ , encontrar un punto admisible es más complejo. Para resolver estos problemas lo usual es utilizar un método iterativo basado en una estrategia de conjunto activo. Así en cada iteración tenemos un punto admisible  $x_k$  y un conjunto de trabajo formado por las restricciones que son activas en  $x_k$ . Los vectores  $a_j$  correspondientes a las restricciones que forman parte de un mismo conjunto de trabajo son linealmente independientes.

El conjunto de trabajo está caracterizado por:

- un conjunto de  $m_k$  índices correspondientes a las restricciones activas que forman parte del conjunto de trabajo
- una matriz  $A_k$  de dimensión  $n \times m_k$  cuya  $i$ -ésima columna contiene los coeficientes de la  $i$ -ésima restricción del conjunto de trabajo
- un vector  $b^k$  con  $m_k$  componentes, conteniendo los términos  $b_j$  de esas restricciones

Disponemos igualmente de la factorización  $QR$  de  $A_k = Q_k \begin{pmatrix} R_k \\ 0 \end{pmatrix}$  y por lo tanto de  $Y_k, S_k$  y  $Z_k$ .

Para obtener el nuevo punto  $x_{k+1}$ :



**Se calcula** una solución  $d_{Z_k}$  del sistema

$$H_{Z_k} y = -c_{Z_k}$$

con  $H_{Z_k} = Z_k^t H Z_k$  y  $c_{Z_k} = Z_k^t \nabla f(x_k)$ .

**Se define** entonces

$$d_k = Z_k d_{Z_k}$$

Así,  $x_k + d_k$  es la solución del problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{verificando} \\ A_k^t x = b^k \end{array} \right.$$

**Sin embargo**, si hacemos  $x_{k+1} = x_k + d_k$  puede suceder que no sea admisible para el conjunto de restricciones del problema original.

**Por tanto, tomaremos:**

$$x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k$$

con

$$\rho_k = \min \left\{ 1, \min_{j \in I_k, a_j^t d_k > 0} \frac{b_j - a_j^t x_k}{a_j^t d_k} \right\}$$

donde *cada cociente que aparece en la fórmula anterior representa la longitud del paso que hay que tomar en la dirección  $d_k$  para que la restricción correspondiente se haga activa.*

Notemos que  $d_k$  es una dirección de descenso para  $f$  pues  $\nabla f(x_k)^t d_k = -d_{Z_k}^t H_{Z_k} d_{Z_k} < 0$ .

Según el valor de  $\rho_k$ , tendremos que seguir distintos caminos:

Si  $\rho_k = 1$  entonces  $x_{k+1}$  es solución de:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} x^t H x + c^t x \\ \text{verificando} \\ a_j^t x = b_j, \quad j \in I_k \\ a_j^t x \leq b_j, \quad j \notin I_k \end{array} \right.$$

pero todavía debemos averiguar si  $x_{k+1}$  es solución de  $(\mathcal{PQ})$  o si podemos disminuir más el valor de  $f$  (en puntos donde las restricciones saturadas sean distintas).

Para ello debemos comprobar si  $x_{k+1} = x_k + d_k$  satisface las condiciones de optimalidad del problema original:

- Resolvemos el sistema:

$$A_k \lambda = -\nabla f(x_{k+1})$$

y llamamos  $\lambda_k$  a la solución.

- Si las componentes  $\lambda_k^j$  correspondientes a restricciones de desigualdad activas son todas positivas o nulas se tiene que  $x_{k+1}$  es la solución buscada.
- En caso contrario elegimos el multiplicador  $\lambda_k^{j_0}$  más negativo entre los correspondientes las restricciones de desigualdad y eliminamos la correspondiente restricción de desigualdad del conjunto de trabajo. De esta forma  $I_{k+1} = I_k \setminus \{j_0\}$  y repetimos el proceso anterior.

NOTA: El cálculo de  $\lambda_k$  puede realizarse fácilmente a partir de la factorización  $QR$  de  $A_k$ . Como  $\rho_k = 1$  se tiene que

$$Z_k^t \nabla f(x_{k+1}) = Z_k^t (Hx_{k+1} + c) = Z_k^t (Hx_k + HZ_k d_{Z_k} + c) = H_{Z_k} d_{Z_k} + p_{Z_k} = 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} A_k \lambda_k = -\nabla f(x_{k+1}) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} R_k \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_k = - \begin{pmatrix} Y_k^t \\ S_k^t \end{pmatrix} \nabla f(x_{k+1}) \\ &\Leftrightarrow R_k \lambda_k = -Y_k^t \nabla f(x_{k+1}) \end{aligned}$$

siendo este último sistema inmediato de resolver.

Si  $\rho_k < 1$ , se satura una restricción  $j_0$ , entonces se hace  $I_{k+1} = I_k \cup \{j_0\}$  y se repite el algoritmo anterior.

## Programación cuadrática general

Se modificará el algoritmo de la sección anterior de forma que se puedan resolver problemas cuadráticos en los que la matriz  $H$  **no sea definida positiva**. En realidad lo que se ha utilizado en el algoritmo anterior es el hecho de que cada hessiano reducido  $H_{Z_k}$  es definido positivo. Esto ha permitido obtener su factorización de Cholesky para calcular  $d_{Z_k}$  y asegurar que  $d_k$  sea una dirección de descenso.

La cuestión está en como tratar el **caso indefinido**.

- Una clase de algoritmos (ver Fletcher) son los que siguen la estrategia de elegir cierto subconjunto de restricciones activas de forma que el hessiano reducido respecto a ese subconjunto tiene a lo sumo un autovalor no positivo. Casi todos estos métodos comienzan en un vértice de la región admisible, es decir, un punto para el cual hay  $n$  restricciones activas siendo necesario introducir restricciones artificiales cuando el número de restricciones reales es inferior a  $n$ . Esta estrategia puede hacer lenta la resolución del problema.
- Otro tipo de métodos permiten cualquier número de autovalores no positivos en el hessiano reducido y por tanto no necesitan partir de un vértice de la región admisible.

## Programación no lineal general:

Vamos a discutir algoritmos para resolver el problema de programación con restricciones:

$$(OCR) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{verificando} \\ c_i(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq m_I \\ c_i(x) \leq 0, \quad m_I + 1 \leq i \leq m_I + m_D \end{cases}$$

donde la función objetivo  $f$  y las funciones  $c_i$  que describen las restricciones son **regulares**, a valores reales.

Los algoritmos que se describen son **iterativos** por naturaleza. Generan una sucesión destinada a converger a la solución  $x^*$ .

Es importante fijarse en la naturaleza de las restricciones a la hora de elegir los algoritmos:

- Los problemas con restricciones **suaves** pueden, muchas veces, reformularse como problemas sin restricciones añadiendo a la función objetivo un término de penalización incluyendo las restricciones.
- Desde un punto de vista algorítmico, las restricciones **fuertes** son aquellas que deben satisfacerse para que todas las restricciones y la función objetivo en  $(OCR)$  tengan sentido.

Algunas de estas funciones pueden incluso no estar definidas en puntos inadmisibles.  
Para problemas con restricciones fuertes que deben satisfacerse en todas las iteraciones deben elegirse algoritmos admisibles.

## Método de penalización cuadrática

Vamos a considerar primero el problema de optimización con **restricciones de igualdad**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{verificando} \\ c_i(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq m_I \end{array} \right.$$

Se define **la función de penalización cuadrática**  $Q(x, \mu)$  para este problema como:

$$Q(x, \mu) = f(x) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^{m_I} c_i^2(x)$$

donde  $\mu > 0$  es el parámetro de penalización. Haciendo tender  $\mu$  a cero, penalizamos las violaciones de las restricciones con creciente severidad.

Parece natural elegir una sucesión  $\{\mu_k\}$  con  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0$  y calcular el mínimo aproximado



$x_k$  de  $Q(x, \mu_k)$  para cada  $k$ .

Para el problema general ( $OCR$ ), que contiene tanto restricciones de igualdad como de desigualdad, definimos  $Q(x, \mu)$  como:

$$Q(x, \mu) = f(x) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^{m_I} c_i^2(x) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=m_I+1}^{m_I+m_D} ([c_i(x)]^+)^2$$

donde  $[y]^+ = \max(y, 0)$ .

## ESQUEMA DEL ALGORITMO

1. Elegir  $x_0^{ini} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu_0 > 0$ ,  $k = 0$
2. Encontrar un mínimo aproximado  $x_k$  de  $Q(\cdot, \mu_k)$  comenzando en  $x_k^{ini}$  y terminando cuando  $\|\nabla Q(x, \mu_k)\| < \epsilon$ , ( $\epsilon$  pequeño dado).
3. si se verifica el test final de convergencia, PARAR con solución aproximada  $x_k$ .
4. si no se verifica, elegir un nuevo parámetro  $\mu_{k+1} \in (0, \mu_k)$  y un nuevo punto inicial  $x_{k+1}^{ini}$ , hacer  $k = k + 1$  y volver a 2.

## OBSERVACIONES:

- La sucesión de parámetros  $\{\mu_k\}$  puede ser elegida de manera adaptativa.
- Cuando la minimización de  $Q(x, \mu_k)$  se hace muy cara para algún  $k$ , se elige  $\mu_{k+1}$  sólo un poco más pequeño que  $\mu_k$ , por ejemplo.
- Si el mínimo se encuentra de forma barata, se intenta una reducción más ambiciosa, por ejemplo  $\mu_{k+1} = 0,1\mu_k$ .

- El problema está en que, cuando  $\mu_k$  se hace muy pequeño, la matriz hessiana  $\nabla_{xx}^2 Q(x, \mu_k)$  es muy mal condicionada cerca del mínimo. Esto conduce a problemas a la hora de aplicar métodos para la resolución del problema sin restricciones (cálculo del paso de Newton, gradiente conjugado, ...).

## Método de barrera logarítmica

Vamos a comenzar describiendo el concepto de funciones barrera en términos de **problemas con restricciones de desigualdad**. Dado el problema:

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{verificando} \\ c_i(x) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m_D \end{cases}$$

la región estrictamente admisible está definida por:

$$\mathcal{F}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n / c_i(x) < 0, \quad i = 1, \dots, m_D\}$$

y supondremos que es no vacía. Las funciones barrera para este problema tienen las siguientes propiedades:

- son infinitas excepto en  $\mathcal{F}_0$
- son regulares dentro de  $\mathcal{F}_0$
- su valor se aproxima a  $\infty$  cuando  $x$  se aproxima a la frontera de  $\mathcal{F}_0$

La función barrera más importante es la función barrera logarítmica, que en nuestro caso se escribe:

$$-\mu \sum_{i=1}^{m_D} \log(-c_i(x))$$

y de esta forma la función objetivo-barrera, llamada función barrera logarítmica, está dada por:

$$P(x, \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m_D} \log(-c_i(x))$$

donde  $\mu$  se llama parámetro barrera. Puede probarse que, bajo ciertas condiciones, cuando  $\mu \rightarrow 0$ ,  $x(\mu)$  se aproxima a la solución del problema con restricciones de desigualdad. Sin embargo el escalado de la función  $P(x, \mu)$  se hace muy pobre cuando  $\mu \rightarrow 0$ , lo cual conduce a dificultades a la hora de resolver los problemas intermedios de optimización sin restricciones.

## ESQUEMA DEL ALGORITMO

1. Elegir  $x_0^{ini} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu_0 > 0$ ,  $k = 0$
2. Encontrar un mínimo aproximado  $x_k$  de  $P(\cdot, \mu_k)$  comenzando en  $x_k^{ini}$  y terminando cuando  $\|\nabla P(x, \mu_k)\| < \epsilon$ , ( $\epsilon$  pequeño dado).
3. Si se verifica el test final de convergencia, PARAR con solución aproximada  $x_k$ .
4. Si no se verifica, elegir un nuevo parámetro barrera  $\mu_{k+1} \in (0, \mu_k)$  y un nuevo punto inicial  $x_{k+1}^{ini}$ , hacer  $k = k + 1$  y volver a 2.

En el caso del problema ( $OCR$ ) de optimización **con restricciones de igualdad y desigualdad** incluimos términos de penalización cuadrática para tratar las restricciones de igualdad. Si suponemos, por simplicidad, que el coeficiente del término de penalización cuadrática es  $1/\mu$ , donde  $\mu$  es el parámetro barrera, entonces la función de penalización cuadrática-barrera logarítmica será:

$$B(x, \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=m_I+1}^{m_I+m_D} \log(-c_i(x)) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^{m_I} c_i^2(x)$$

La minimización de  $B(x, \mu)$  requiere identificar **un punto inicial que sea estrictamente admisible con respecto a las restricciones de desigualdad**. Esto puede hacerse de manera trivial introduciendo en el problema las variables de salto  $s_i$ , para  $i = m_I + 1, \dots, m_I + m_D$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{(x,s) \in \mathbb{R}^{n+m_D}} f(x) \\ \text{verificando} \\ c_i(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq m_I \\ c_i(x) + s_i = 0, \quad m_I + 1 \leq i \leq m_I + m_D \\ s_i \geq 0, \quad m_I + 1 \leq i \leq m_I + m_D \end{array} \right.$$

La función de penalización correspondiente a este problema es:

$$f(x) - \mu \sum_{i=m_I+1}^{m_I+m_D} \log(s_i) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^{m_I} c_i^2(x) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=m_I+1}^{m_I+m_D} (c_i(x) + s_i)^2$$

Cualquier punto  $(x, s)$  con  $s > 0$  está en el dominio de esta función.

## Método de gradiente reducido generalizado

Este método se basa en la idea de reducir el número de variables utilizando las restricciones y resolver el problema reducido y sin restricciones resultante con un método de descenso.

Para exponer este método vamos a considerar el problema con restricciones de igualdad:

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{verificando} \\ c_i(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Si  $x_k$  es un vector admisible ( $c(x_k) = 0$ ) y  $\{\nabla c_i(x_k), \quad 1 \leq i \leq m\}$  es una familia de vectores linealmente independientes se puede, utilizando el teorema de las funciones implícitas, pasar a un problema de  $n - m$  variables independientes. Sea

$$G = \begin{pmatrix} \nabla c_1(x_k)^t \\ \vdots \\ \nabla c_m(x_k)^t \end{pmatrix}$$

como los gradientes son linealmente independientes existen dos matrices  $B$  y  $N$  de dimensiones  $m \times m$  y  $m \times (n - m)$  respectivamente, tales que:  $G = (B \ N)$  con  $B$  inversible.



Si  $x$  es un vector podemos escribirlo como:

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

donde  $x_B$  son las variables dependientes y  $x_N$  las variables independientes ( $x_B = x_B(x_N)$ ), ya que  $c(x_B, x_N) = 0$ .

Llamemos  $F(x_N) = f(x_B(x_N), x_N)$ , entonces:

$$\nabla F(x_N) = \nabla_N f(x_B(x_N), x_N) + \left(\frac{\partial x_B}{\partial x_N}\right)^t \nabla_B f(x_B(x_N), x_N)$$

Como  $\frac{\partial x_B}{\partial x_N} = -B^{-1}N$ , la expresión del **gradiente reducido** es:

$$\nabla F(x_N) = \nabla_N f(x_B(x_N), x_N) - N^t (B^{-1})^t \nabla_B f(x_B(x_N), x_N)$$

Este es el gradiente correspondiente a la función  $F$  de las variables independientes  $x_N$  y puede aplicarse un método de descenso para obtener una solución. Las iteraciones serán de la forma:

$$(x_N)_{k+1} = (x_N)_k + t_k d_k$$

donde  $d_k$  se obtiene utilizando el gradiente reducido ( $d_k = -\nabla F((x_N)_k)$  o  $d_k = -M_k \nabla F((x_N)_k)$  con  $M_k$  una aproximación cuasi-Newton del inverso del hessiano).

El problema ahora es calcular  $(x_B)_{k+1}$ . Se tiene la predicción de primer orden:

$$(\tilde{x}_B)_{k+1} = (x_B)_k - t_k B^{-1} N d_k$$

pero, en general,  $c((\tilde{x}_B)_{k+1}, (x_N)_{k+1})$  no es nulo. Es necesario efectuar una fase llamada de restauración de admisibilidad sobre  $(\tilde{x}_B)_{k+1}$ . Para esto puede aplicarse el método de Newton al sistema:

$$c(\tilde{x}_B, (x_N)_{k+1}) = 0$$

tomando como punto de partida  $(\tilde{x}_B)_{k+1}$  y dejando  $(x_N)_{k+1}$  fijo.

## Método de Newton para problemas con restricciones de igualdad

Consideramos el problema de optimización con restricciones de igualdad:

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{verificando} \\ c(x) = 0, \quad \text{donde } c = (c_i)_{i=1}^{m_I} \end{cases}$$

Para los problemas de optimización con restricciones de igualdad puede pensarse en obtener el desplazamiento  $d_k$  haciendo la aproximación cuadrática de  $f$  en  $x_k$  y linealizando las restricciones en  $x_k$ . Con este método se calcula la solución del problema cuadrático:

$$\begin{cases} \min \nabla f(x_k)^t d + \frac{1}{2} d^t \nabla^2 f(x_k) d \\ c(x_k) + A(x_k) d = 0, \end{cases} \quad (1)$$

donde  $A(x_k)$  es la matriz Jacobiana de las restricciones (matriz de las derivadas parciales de  $c$ , la línea  $i$  de  $A(x_k)$  contiene  $\nabla c_i(x_k)^t$ ) y se define el nuevo iterante

$$x_{k+1} = x_k + d_k$$

Pero, ¡ATENCIÓN, este algoritmo, en general, NO ES CONVERGENTE!, incluso puede ocurrir que la sucesión se aleje de la solución aun partiendo de un punto inicial muy cercano.

La técnica adecuada es tratar simultáneamente la minimización del criterio y la realización de las restricciones considerando las condiciones de optimalidad del problema. Estas forman un sistema de  $n + m$  ecuaciones no lineales con  $n + m$  incógnitas  $(x^*, \lambda^*)$  que se pueden intentar resolver utilizando el método de Newton.

Se obtiene así lo que se llama **un método primal-dual**, lo que quiere decir que se genera una sucesión  $\{x_k, \lambda_k\}$  por linealización de las condiciones de optimalidad:

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + A(x^*)^t \lambda^* = 0 \\ c(x^*) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

donde  $x_k$  se acerca a una solución primal  $x^*$  y  $\lambda_k$  se acerca a una solución dual  $\lambda^*$ .

Sea  $(x_k, \lambda_k)$  el iterante en el que se está. El incremento  $(d_k, \mu_k)$  es solución del sistema  $(\mathcal{EN}1)$ :

$$\begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 \ell(x_k, \lambda_k) & A(x_k)^t \\ A(x_k) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_k \\ \mu_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x \ell(x_k, \lambda_k) \\ c(x_k) \end{pmatrix}$$

El método de Newton determina el iterante siguiente  $(x_{k+1}, \lambda_{k+1})$  como:

$$x_{k+1} = x_k + d_k \quad \text{y} \quad \lambda_{k+1} = \lambda_k + \mu_k$$

Como  $\nabla_x \ell(x_k, \lambda_k)$  es lineal en  $\lambda_k$  el sistema puede reescribirse en la forma  $(\mathcal{EN}2)$ :

$$\begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 \ell(x_k, \lambda_k) & A(x_k)^t \\ A(x_k) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_k \\ \lambda_k^{PQ} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f(x_k) \\ c(x_k) \end{pmatrix}$$

donde  $\lambda_k^{PQ} = \lambda_k + \mu_k$ . El exponente  $PQ$  se pone pues, como veremos ahora,  $\lambda_k^{PQ}$  es el multiplicador asociado a las restricciones de un problema cuadrático.

El iterante siguiente del método de Newton se escribe entonces como:

$$x_{k+1} = x_k + d_k \quad \text{y} \quad \lambda_{k+1} = \lambda_k^{PQ}$$

Como en el caso sin restricciones, se puede ver la ecuación de Newton  $(\mathcal{EN}1)$  como el

sistema de optimalidad de un problema cuadrático:

$$\begin{cases} \text{mín } \nabla_x \ell(x_k, \lambda_k)^t d + \frac{1}{2} d^t \nabla_{xx}^2 \ell(x_k, \lambda_k) d \\ c(x_k) + A(x_k) d = 0, \end{cases} \quad (3)$$

Este problema se llama **problema cuadrático tangente**. Si en lugar de  $(\mathcal{EN}1)$  se parte de  $(\mathcal{EN}2)$  se obtiene:

$$\begin{cases} \text{mín } \nabla f(x_k)^t d + \frac{1}{2} d^t \nabla_{xx}^2 \ell(x_k, \lambda_k) d \\ c(x_k) + A(x_k) d = 0, \end{cases} \quad (4)$$

que es un **segundo problema cuadrático tangente**.

*NOTA: La formulación como sucesión de problemas de minimización es preferible a la sucesión de resoluciones de condiciones de optimalidad, pues estas últimas pueden generar un punto estacionario que no sea mínimo.*

## ESQUEMA DEL ALGORITMO

1. Elegir  $(x_0, \lambda_0)$  inicial ,  $k = 0$ .
2. Test de convergencia: (por ejemplo  $\|\nabla f(x^k) + A(x^k)^t \lambda^k\| + \|c(x^k)\| < \epsilon$ ,  $\epsilon$  pequeño dado)
  - si se verifica, PARAR
  - si no se verifica, continuar
3. Encontrar la solución  $(d_k, \lambda_k^{PQ})$  del problema cuadrático tangente:

$$\begin{cases} \text{mín } \nabla f(x_k)^t d + \frac{1}{2} d^t \nabla_{xx}^2 \ell(x_k, \lambda_k) d \\ c(x_k) + A(x_k) d = 0, \end{cases} \quad (5)$$

4.  $x_{k+1} = x_k + d_k$ ,  $\lambda_{k+1} = \lambda_k^{PQ}$  ,  $k = k + 1$ . Ir a 2.

Resultado de convergencia local:



Sean  $f$  y  $c$  de clase  $C^2$  en un entorno de un punto estacionario regular  $x^*$  con multiplicador  $\lambda^*$ . Entonces existe un entorno  $V$  de  $(x^*, \lambda^*)$  tal que si  $(x_0, \lambda_0) \in V$  el algoritmo de Newton está bien definido y genera una sucesión  $\{(x_k, \lambda_k)\} \rightarrow (x^*, \lambda^*)$  superlinealmente. Si  $f''$  y  $c''$  son lipschitzianas en un entorno de  $x^*$  la convergencia es cuadrática.

## Métodos locales para problemas con restricciones de desigualdad

Vamos a considerar el problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{verificando} \\ c_I(x) = 0, \quad \text{donde } c_I = (c_i)_{i=1}^{m_I} \\ c_D(x) \leq 0, \quad \text{donde } c_D = (c_i)_{i=m_I+1}^{m_D} \end{array} \right.$$

Intentamos resolverlo usando un método de Newton. Se parte de las condiciones de optimalidad de primer orden (KKT):

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + A(x^*)^t \lambda^* = 0 \\ c_I(x^*) = 0 \\ c_D(x^*) \leq 0 \\ \lambda_D^* \geq 0 \\ (\lambda_D^*)^t c_D(x^*) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Como  $\lambda_D^* \geq 0$  y  $c_D(x^*) \leq 0$  todos los sumandos de la última igualdad son del mismo signo y entonces ésta es equivalente a:

$$\lambda_i(x^*) c_i(x^*) = 0, \quad i = m_I + 1, \dots, m_D$$

Al linealizar estas condiciones en un punto  $(x_k, \lambda_k)$  obtenemos un desplazamiento  $(d_k, \mu_k)$  solución de:

$$\begin{aligned} \nabla_{xx}^2 \ell(x_k, \lambda_k) d_k + A(x_k)^t \mu_k &= -\nabla_x \ell(x_k, \lambda_k) \\ c_I(x_k) + A_I(x_k) d_k &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_D(x_k) + A_D(x_k)d_k &\leq 0 \\
(\lambda_k + \mu_k)_D &\geq 0 \\
(\lambda_k + \mu_k)_D^t c_D(x_k) + (\lambda_k)_D^t A_D(x_k)d_k &= 0
\end{aligned}$$

Si notamos  $\lambda_k^{PQ} = \lambda_k + \mu_k$  y añadimos a la última ecuación el término  $(\mu_k)_D^t A_D(x_k)d_k$  (que es despreciable frente a los otros términos pues los desplazamientos  $\mu_k$  y  $d_k$  son pequeños cerca de la solución), el sistema anterior se escribe:

$$\begin{aligned}
\nabla_{xx}^2 \ell(x_k, \lambda_k)d_k + A(x_k)^t \lambda_k^{PQ} &= -\nabla f(x_k) \\
c_I(x_k) + A_I(x_k)d_k &= 0 \\
c_D(x_k) + A_D(x_k)d_k &\leq 0 \\
(\lambda_k^{PQ})_D &\geq 0 \\
(\lambda_k^{PQ})_D^t (c_D(x_k) + A_D(x_k)d_k) &= 0
\end{aligned}$$

que son las condiciones de optimalidad del problema cuadrático tangente ( $\mathcal{PQT}$ ):

$$\begin{cases} \text{mín } \nabla f(x_k)^t d + \frac{1}{2} d^t \nabla_{xx}^2 \ell(x_k, \lambda_k) d \\ c_I(x_k) + A_I(x_k) d = 0 \\ c_D(x_k) + A_D(x_k) d \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

Se llama **programación cuadrática sucesiva** (PQS) al algoritmo que genera una sucesión  $\{(x_k, \lambda_k)\}$  de aproximaciones de  $(x^*, \lambda^*)$  calculando una solución primal dual  $(d_k, \lambda_k^{PQ})$  del problema cuadrático ( $\mathcal{PQT}$ ) en cada iteración y haciendo  $x_{k+1} = x_k + d_k$ .

## ALGORITMO DE PROGRAMACIÓN CUADRÁTICA SUCESIVA

1. Elegir  $(x_0, \lambda_0)$  inicial ,  $k = 0$ .
2. Test de convergencia:  
(por ejemplo  $\|\nabla f(x^*) + A(x^*)^t \lambda^*\| + \|c_I(x^*)\| + \|[c_D(x^*)]^+\| < \epsilon$ ,  $\epsilon$  pequeño dado)
  - si se verifica, PARAR
  - si no se verifica, continuar
3. Encontrar la solución primal-dual  $(d_k, \lambda_k^{PQ})$  del problema cuadrático tangente ( $PQT$ ).
4.  $x_{k+1} = x_k + d_k$ ,  $\lambda_{k+1} = \lambda_k^{PQ}$  ,  $k = k + 1$ . Ir a 2.

### OBSERVACIONES:

- La programación cuadrática sucesiva es bastante costosa si hay un número grande de restricciones de desigualdad pues es necesario linealizar incluso las restricciones inactivas que no juegan ningún papel cuando los iterantes están próximos a la solución.
- La programación y el análisis de la convergencia es más complicado que en el caso de restricciones de igualdad. Puede ocurrir que los subproblemas cuadráticos sean no aco-

tados o tengan múltiples soluciones incluso cerca de una solución del problema original que tenga buenas propiedades tales como la verificación de las condiciones suficientes de optimalidad de segundo orden, la complementareidad estricta y la cualificación de restricciones.

## Globalización

Los algoritmos que acabamos de ver convergen si el primer iterante está próximo de una solución verificando las condiciones suficientes de optimalidad de segundo orden. Es importante tener técnicas que permitan asegurar la convergencia con puntos iniciales lejos de la solución.

Hay, al menos, dos clases de técnicas para globalizar:

- las búsquedas curvíneas (sólo hablaremos de la búsqueda lineal)
- las regiones de confianza

La idea es medir el progreso realizado de un iterante  $x_k$  al siguiente  $x_{k+1}$  mediante una función auxiliar llamada *función de mérito*. Para medir este progreso esta función intenta tener en cuenta los dos objetivos del problema:

- minimizar  $f$
- que se satisfagan las restricciones

La función de mérito suele presentarse de la forma:

$$\theta = f(x) + \Pi(x)$$

donde  $\Pi(x)$  es una función que penaliza la violación de las restricciones.



Vamos a seleccionar algunas funciones de mérito:

- Penalización exterior  $l_2$ :

$$f(x) + \frac{\sigma}{2} \|c(x)^\# \|_2^2$$

donde  $v_i^\# = v_i$  si  $i \in I$  y  $v_i^\# = v_i^+ = \max(0, v_i)$  si  $i \in D$ .

- Lagrangiana:

$$f(x) + \mu^t c(x)$$

- Lagrangiana aumentada:

$$f(x) + \mu_I^t c_I(x) + \frac{\sigma}{2} \|c_I(x)\|_2^2 + \sum_{i \in D} \left( \mu_i \max\left(-\frac{\mu_i}{\sigma}, c_i(x)\right) + \frac{\sigma}{2} \left[ \max\left(-\frac{\mu_i}{\sigma}, c_i(x)\right) \right]^2 \right)$$

El coeficiente  $\sigma$  se llama parámetro de aumento.

- Penalización de Han:

$$f(x) + \sigma \|c(x)^\# \|$$

Se dice que  $\theta$  es una función de penalización exacta en un mínimo local  $x^*$  del problema con restricciones si  $x^*$  es mínimo local de  $\theta$ .

La penalización de Han es exacta para  $\sigma$  grande.

## Métodos de puntos interiores para problemas no lineales

Consideremos el problema:

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{verificando} \\ c_i(x) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m_D \end{cases}$$

la región estrictamente admisible está definida por:

$$\mathcal{F}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n / c_i(x) < 0, \quad i = 1, \dots, m_D\}$$

y supondremos que es no vacía. La función barrera más importante es la función barrera logarítmica, que en nuestro caso se escribe:

$$-\mu \sum_{i=1}^{m_D} \log(-c_i(x))$$

y de esta forma la función objetivo-barrera, llamada función barrera logarítmica, está dada por:

$$P(x, \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m_D} \log(-c_i(x))$$

donde  $\mu$  se llama parámetro barrera. Puede probarse que, bajo ciertas condiciones, cuando  $\mu \rightarrow 0$ ,  $x(\mu)$  se aproxima a la solución del problema con restricciones de desigualdad. Sin embargo el escalado de la función  $P(x, \mu)$  se hace muy pobre cuando  $\mu \rightarrow 0$ , lo cual conduce a dificultades a la hora de resolver los problemas intermedios de optimización sin restricciones.

## ESQUEMA DEL ALGORITMO

1. Elegir  $x_0^{ini} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu_0 > 0$ ,  $k = 0$
2. Encontrar un **mínimo aproximado**  $x_k$  de  $P(\cdot, \mu_k)$  comenzando en  $x_k^{ini}$  y terminando cuando  $\|\nabla P(x, \mu_k)\| < \epsilon$ , ( $\epsilon$  pequeño dado).
3. Si se verifica el test final de convergencia, PARAR con solución aproximada  $x_k$ .
4. Si no se verifica, elegir un nuevo parámetro barrera  $\mu_{k+1} \in (0, \mu_k)$  y un nuevo punto inicial  $x_{k+1}^{ini}$ , hacer  $k = k + 1$  y volver a 2.

**OBSERVEMOS** que en cada iteración  $\frac{\mu_k}{c_i(x_k)}$  da una estimación de los multiplicadores  $\lambda_i$ .

## DIFICULTADES POTENCIALES:

- Una cuestión importante en este algoritmo es que la definición de la función barrera exige que cada punto  $x_k^{ini}$  sea un punto interior al conjunto de restricciones (i.e.  $c(x_k^{ini}) < 0$ ). Una elección simple conduce a hacer  $x_{k+1}^{ini} = x_k$ . Sin embargo al tender  $\mu_k$  a cero puede ocurrir que alguna restricción se haga activa en  $x_k$ .
- La minimización (sin restricciones) de  $P(x, \mu)$  debe hacerse con cuidado pues esta función no está bien definida para puntos no interiores a la región admisible. Si se utilizan métodos con búsqueda de línea esta debe estar especializada para evitar la singularidad del logaritmo. Si se utilizan métodos con región de confianza deberán desecharse direcciones que no cumplan que  $c(x_k + d_k) < 0$ .
- Otra dificultad es el posible mal condicionamiento de  $P(x, \mu)$  para valores pequeños de  $\mu$ . En concreto

$$\nabla_{xx}^2 P(x, \mu) = \nabla_{xx}^2 f(x) + \sum_{i=1}^{m_D} \frac{\mu}{c_i(x)} \nabla_{xx}^2 c_i(x) - \mu A^t(x) C^{-2}(x) A(x)$$

donde  $A(x)$  es la matriz Jacobiana de las restricciones (matriz de las derivadas parciales de  $c$ , la línea  $i$  de  $A(x)$  contiene  $\nabla c_i(x)^t$ ) y  $C(x)$  es la matriz  $C(x) = \text{diag}(c_1(x), \dots, c_{m_D}(x))$ .

El paso de Newton es, entonces, solución de :

$$(\nabla_{xx}^2 f(x) + \sum_{i=1}^{m_D} \frac{\mu}{c_i(x)} \nabla_{xx}^2 c_i(x) - A^t(x) C(x)^{-1} Y A(x)) \Delta x = -(\nabla f(x) + \mu A(x)^t C^{-1}(x) e)$$

donde  $e = (1, 1, \dots, 1)^t$  y  $Y = \text{diag}(\frac{\mu}{c_1(x)}, \dots, \frac{\mu}{c_{m_D}(x)})$ .

Este sistema se hace mal condicionado cuando  $\mu_k$  tiende a cero ya que puede probarse que el número de condición de  $\nabla_{xx}^2 P(x, \mu)$  es  $O(\frac{1}{\mu_k})$ .

## UNA PERSPECTIVA DIFERENTE:

Las condiciones de optimalidad para el problema que estamos estudiando son:

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + A(x^*)^t \lambda^* = 0 \\ C(x^*) \lambda^* = 0 \\ c(x^*) \leq 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

Consideramos ahora el sistema perturbado:

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + A(x^*)^t \lambda^* = 0 \\ C(x^*) \lambda^* = \mu e \\ c(x^*) \leq 0 \\ \lambda^* \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

Los métodos primales-duales buscan soluciones del sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + A(x^*)^t \lambda^* = 0 \\ C(x^*) \lambda^* - \mu e = 0 \end{cases} \quad (10)$$

cuando  $\mu$  tiende a cero al tiempo que mantienen  $c(x^*) \leq 0$  y  $\lambda^* \geq 0$ .

Para encontrar la dirección de búsqueda se utiliza el método de Newton para ecuaciones no lineales. El método de Newton construye un modelo lineal para el sistema anterior alrededor del iterante actual  $(x, \lambda)$  y obtiene la dirección de búsqueda  $(\Delta x, \Delta \lambda)$  resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}^2 f(x) + \sum_{i=1}^{m_D} \lambda_i \nabla_{xx}^2 c_i(x) & A^t(x) \\ \Lambda A(x) & C(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x) + A(x)^t \lambda \\ C(x) \lambda - \mu e \end{bmatrix}$$

donde  $\Lambda = \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda_{m_D})$ .

En general, un paso completo a lo largo de esta dirección no es aceptable pues podrían violarse las restricciones de cota. Para evitar esto se realiza una búsqueda de línea a lo largo de la dirección de Newton de manera que el nuevo iterante es

$$(x, \lambda) + \alpha(\Delta x, \Delta \lambda)$$

Observemos que si despejamos  $\Delta \lambda$  se tiene:

$$(\nabla_{xx}^2 f(x) + \sum_{i=1}^{m_D} \lambda_i \nabla_{xx}^2 c_i(x) - A^t(x)C(x)^{-1}\Lambda A(x))\Delta x = -(\nabla f(x) + \mu A(x)^t C^{-1}(x)e)$$

De esta manera la matriz del sistema depende de un  $\Lambda$  independiente de  $x$  frente a lo que



ocurre en el caso de la penalización logarítmica. Esto es crucial a la hora de solventar las dificultades del método barrera.

## **Bibliografía básica:**

- D. BERTSEKAS : Nonlinear Programming. Athena Scientific. 1995.
- F. BONNANS - J. Ch. GILBERT - C. LEMARECHAL - C. SAGASTIZABAL : Optimisation Numérique: aspects théoriques et pratiques. SMAI-Springer Verlag, 1997.
- R. FLETCHER : Practical Methods of Optimization. John Wiley and Sons, 1987.
- P.E. GILL - W. MURRAY - M. WRIGHT : Practical Optimization. Academic Press, 1981.
- P.E. GILL - W. MURRAY - M. WRIGHT : Numerical linear Algebra and Optimization. Addison-Wesley, 1991.
- D. GOLDFARB - M. J. TODD : Linear Programming. En Handbook in OR & MS, Vol. 1. (G.L. Nemhauser et al., ed.). North-Holland, 1989.
- D.G. LUENBERGER : Programación lineal y no lineal. Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.
- M. MINOUX : Programmation Mathématique. Dunod, 1983.
- J. NOCEDAL - S.J. WRIGHT : Numerical Optimization. Springer, 1999.

- C. POLA : Algoritmos numéricos para la resolución de problemas de optimización con restricciones. Tesis de Doctorado, Universidad de Cantabria, 1992.
- R.J. VANDERBEI : Linear Programming. Kluwer, 1997.
- S.J. WRIGHT : Primal-dual Interior-Point Methods. SIAM, 1997.