# Métodos numéricos de integración en $\mathbb{R}$

## 1 Introducción

La necesidad de aproximar numéricamente el valor de una integral surge por dos motivos fundamentalmente:

- la dificultad o imposibilidad en el cálculo de una primitiva,
- la función a integrar sólo se conoce por una tabla de valores.

Sea, entonces, una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que se conocen los valores de $f$ en los $(n + 1)$ nodos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Trataremos de aproximar la integral $\int_a^b f(x)dx$ por una *fórmula de cuadratura* del tipo:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i).$$

Nos restringiremos al estudio de las fórmulas *de tipo interpolatorio polinómico*, esto es:

$$f(x) \simeq \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x) \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)dx.$$

Por tanto, los coeficientes de la fórmula son:

$$A_i = \int_a^b l_i(x)dx, \quad i = 0, \ldots, n.$$

**Teorema 1** .- *Una fórmula de cuadratura:*

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i)$$

*es de tipo interpolatorio polinómico si y sólo si es exacta en* $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Entonces, para el cálculo de los coeficientes $A_i$ impondremos la exactitud de la fórmula sobre los polinomios $x^k,\ 0 \leq k \leq n$, de la base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ :

$$\sum_{i=0}^{n} A_i\, x_i^k = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Este S.E.L. de $(n+1)$ ecuaciones y $(n+1)$ incógnitas con matriz de Vandermonde (por tanto, inversible) tiene solución única. Resolviendo el sistema se obtienen los valores de los coeficientes $A_i,\ i = 0, \ldots, n.$

**Ejemplo 1** .-
*Partimos de la tabla de valores:*

| $x_i$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | $2$ | $-1$ | $3$ |

*Entonces, para:*

$$x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1$$

*se busca:*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$
$$= 2A_0 - A_1 + 3A_2.$$

*Debemos resolver el sistema:*

$$\left\{ \begin{array}{llll} A_0 & +A_1 & +A_2 & = 2 \\ -A_0 & & +A_2 & = 0 \\ A_0 & & +A_2 & = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

*La solución es:*

$$A_0 = \frac{1}{3},\ A_1 = \frac{4}{3},\ A_2 = \frac{1}{3}$$

*Por tanto:*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq 2.\frac{1}{3} - \frac{4}{3} + 3.\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

**Teorema 2** *(Fórmula para el error de integración) .-*
*Sea* $[c, d]$ *un intervalo que contenga a* $[a, b]$ *y también a los nodos* $x_0, x_1, \ldots, x_n$*. Si* $f \in C^{n+1}([c, d])$ *y el polinomio* $\pi(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n)$ *no cambia de signo en* $(a, b)$*, entonces el error cometido por la fórmula de cuadratura de T.I.P. es:*

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_n(x)dx = \frac{f^{(n+1}(\zeta)}{(n+1)!} \int_a^b \pi(x)dx,$$

*con* $\zeta \in (a, b)$*.*

**Ejemplo 2** .-

1. *Fórmula de Poncelet (o del punto medio):*

$$n = 0 : \qquad x_0 = \frac{a+b}{2}.$$

$$A_0 = b - a.$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)\, f(\frac{a+b}{2}).$$

$$|Error| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \max_{\zeta\in[a,b]} |f''(\zeta)|.$$

2. *Fórmula del Trapecio:*

$$n = 1 : \qquad x_0 = a,\ x_1 = b.$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} A_0 & +A_1 & = b-a \\ A_0 a & +A_1 b & = \frac{b^2-a^2}{2} \end{array} \right. \Rightarrow\ A_0 = A_1 = \frac{b-a}{2}.$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2}\,[f(a) + f(b)]$$

$$|Error| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{\zeta\in[a,b]} |f''(\zeta)|.$$

3. *Fórmula de Simpson:*

$$n = 2 : \qquad x_0 = a,\ x_1 = \frac{a+b}{2},\ x_2 = b.$$

$$\left\{\begin{array}{llll} A_0 & +A_1 & +A_2 & = b-a \\ A_0 a & +A_1 \frac{a+b}{2} & +A_2 b & = \frac{b^2-a^2}{2} \\ A_0 a^2 & +A_1 (\frac{a+b}{2})^2 & +A_2 b^2 & = \frac{b^3-a^3}{3} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow A_0 = A_2 = \frac{b-a}{6},\ A_1 = \frac{2}{3}(b-a).$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6}\,[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)].$$

$$|Error| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \max_{\zeta\in[a,b]} |f^{IV}(\zeta)|.$$

# 2 Propiedades

1. **Invarianza por traslaciones:**

   Si
   $$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i)$$
   $$\int_{a+d}^{b+d} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} B_i\, f(x_i+d)$$
   entonces $\quad B_i = A_i, \quad \forall i = 0, \ldots, n.$

2. **Modificación por homotecias:**

   Si
   $$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i)$$
   $$\int_{ca}^{cb} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} B_i\, f(cx_i)$$
   entonces $\quad B_i = c\, A_i, \quad \forall i = 0, \ldots, n.$

3. **Simetría:**

   Si los nodos están dispuestos simétricamente respecto del centro del intervalo $(a, b)$, es decir:

$$\frac{a+b}{2} - x_i = x_{n-i} - \frac{a+b}{2}, \quad i = 0, \ldots, n,$$

   entonces los coeficientes de la fórmula

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i)$$

   verifican $\quad A_i = A_{n-i}, \;\; \forall i = 0, \ldots, n.$

**Observación 1** .- *(Fórmulas de Newton-Cotes)*

*Cuando los nodos de cuadratura en el intervalo $[a, b]$ son equiespaciados surgen las fórmulas de Newton-Cotes.*

*Se habla de fórmulas cerradas cuando los dos extremos del intervalo son nodos.*

*En caso contrario, cuando los extremos no son nodos de cuadratura, se habla de fórmulas abiertas.*

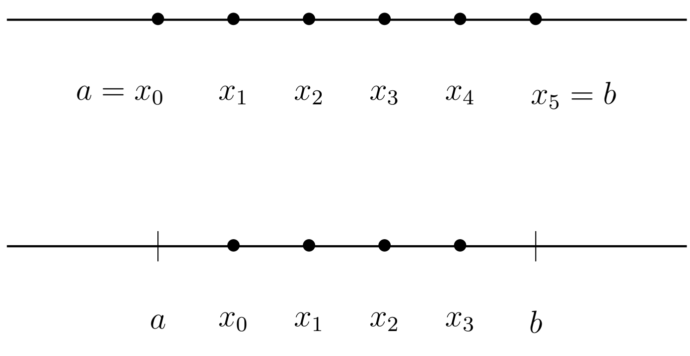


Figure 1: Newton-Cotes cerrada (superior) y abierta (inferior)

*Por ejemplo, Trapecio y Simpson son fórmulas de Newton-Cotes cerradas.*

*En cambio, Poncelet es una fórmula de Newton-Cotes abierta.*

## 3 Fórmulas de cuadratura compuestas

Consisten en dividir el intervalo $[a, b]$ en subintervalos, a cada uno de los cuales se le aplica una fórmula de Newton-Cotes.

Supongamos $m$ subintervalos con $(n+1)$ nodos cada uno:

$$H = \frac{b-a}{m}, \qquad h = \frac{H}{n}.$$

$$y_j = a + jH, \quad j = 0, \ldots, m.$$
$$x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, mn.$$

Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x)dx,$$

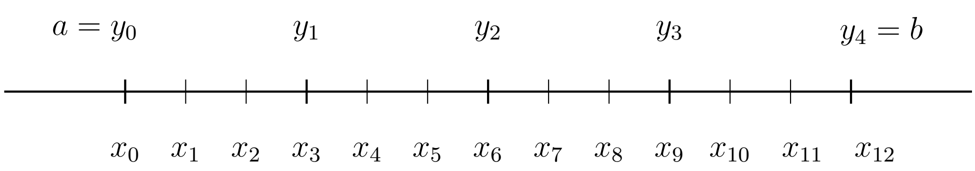


Figure 2: Ejemplo de fórmula compuesta para $m = 4, \ n = 3$.

con:

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x)dx \simeq \sum_{k=0}^{n} A_k\, f(y_{j-1}+kh), \quad j=1,\ldots,m.$$

**Ejemplo 3** .-

1. *Trapecio compuesto:*

$$n=1: \qquad h=\frac{b-a}{m}.$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h\,\{\,\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]+\sum_{k=1}^{m-1} f(a+kh)\}.$$

$$|Error| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2}\max_{\zeta\in[a,b]}|f''(\zeta)|.$$

2. *Simpson compuesto:*

$$n=2: \qquad h=\frac{b-a}{2m}.$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3}\,[\,f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{m-1} f(a+2kh)$$

$$+4\sum_{k=1}^{m} f(a+(2k-1)h)].$$

$$|Error| \leq \frac{(b-a)^5}{2880m^4}\max_{\zeta\in[a,b]}|f^{IV}(\zeta)|.$$