Una interesante (y simple) propiedad del modelo de Ricker

Los modelos discretos de población son la herramienta matemática más apropiada para especies cuya reproducción ocurre sólo una vez al año durante un período muy corto. Entre los modelos más conocidos está el de Ricker (W. E. Ricker, 1954), que, tras un cambio de variable si es necesario, se puede escribir en la forma

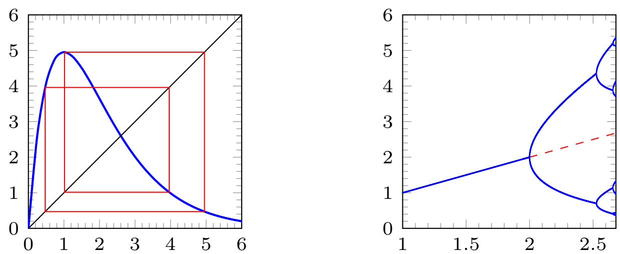
$$x_{n+1} = x_n e^{r-x_n}, \tag{1}$$

con $r > 0$. Partiendo de una población inicial x_0, el número de individuos en la siguiente generación se calcula usando la recurrencia (1). La población se mantiene en equilibrio si $x_{n+1} = x_n$ para todo n, así que los equilibrios son 0 y r. Una solución tiene período (minimal) p si $x_p = x_0$ y $x_0 \neq x_i$ para $1 \leq i < p$. En este caso, el conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}\}$ se llama órbita de x_0. El modelo de Ricker tiene una propiedad muy curiosa para los ecólogos, y es que aunque la abundancia de población oscile en una órbita periódica, la media anual no cambia y coincide con el equilibrio positivo. La prueba de esta importante propiedad es un simple ejercicio.

Proposición. *Si $\{x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}\}$ es una órbita p-periódica de* (1) *con $p > 1$, entonces $(1/p)\sum_{k=0}^{p-1} x_k = r$.*

Demostración. El periodo es $p > 1$, así que $x_p = x_0 \neq 0$. Usando (1), se tiene:

$$\begin{aligned} x_p &= x_{p-1}e^{r-x_{p-1}} = x_{p-2}e^{r-x_{p-2}}e^{r-x_{p-1}} = \cdots = x_0 e^{r-x_0}e^{r-x_1}\cdots e^{r-x_{p-2}}e^{r-x_{p-1}} \\ &= x_0 e^{pr-(x_0+x_1+\cdots+x_{p-1})} = x_0 \implies pr - (x_0 + x_1 + \cdots + x_{p-1}) = 0. \end{aligned}$$ □



Como ejemplo, a la izquierda se muestra una órbita de período 4 en la gráfica de $f(x) = xe^{r-x}$, con $r = 2.6$ (nótese que $x_{n+1} = f(x_n)$). A la derecha se muestra el diagrama de bifurcación del modelo de Ricker: en la abscisa se representa el valor de r y en la ordenada el número de individuos a largo plazo, partiendo de un valor inicial arbitrario $x_0 > 0$. Las sucesiones definidas por (1) convergen al equilibrio positivo si $0 < r \leq 2$ (el lector lo puede intentar probar como ejercicio) y oscilan (manteniendo la media en el equilibrio, representado con trazo discontinuo) si $r > 2$.

Eduardo Liz Marzán, Departamento de Matemática Aplicada II, Universidade de Vigo
Correo electrónico: eliz@uvigo.es
Página web: http://www.dma.uvigo.es/~eliz/