

## Un puente entre una ecuación diferencial ordinaria y un sistema dinámico discreto vía ecuaciones diferenciales con retardo

por

**Eduardo Liz**

RESUMEN. La ecuación diferencial ordinaria  $x'(t) = -x(t) + f(x(t))$  y la ecuación en diferencias con argumento continuo  $x(t) = f(x(t-1))$  se pueden considerar como los casos límite de una familia de ecuaciones diferenciales con retardo. Además, bajo ciertas condiciones sobre la función  $f$ , se puede observar una transición suave entre la dinámica de ambas, utilizando el retardo como parámetro de bifurcación.

### 1. INTRODUCCIÓN

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$x'(t) + x(t) = f(x(t)), \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua. Si, para cada  $t \geq 0$ , sustituimos  $x'(t)$  por el operador  $\Delta x(t) = x(t+1) - x(t)$ , se obtiene la ecuación en diferencias con argumento continuo

$$x(t) = f(x(t-1)), \quad t \geq 0. \quad (1.2)$$

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) representan dos formas de modelar procesos: mediante ecuaciones diferenciales y mediante ecuaciones en diferencias. En general, la dinámica global de las soluciones para estas dos ecuaciones es muy diferente, aunque se pueden observar aspectos comunes. Por ejemplo, los puntos de equilibrio en ambos casos se obtienen resolviendo la ecuación escalar  $f(x) = x$ . En este trabajo supondremos que  $f(0) = 0$  y que se verifica la condición  $xf(x) \leq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , de modo que el único equilibrio es  $x = 0$ .

En estas condiciones, la ecuación (1.1) tiene una dinámica muy simple: todas las soluciones convergen a cero. Sin embargo, el comportamiento asintótico (a largo plazo) de las soluciones de (1.2) puede ser mucho más complejo. Dicho comportamiento está determinado por el sistema dinámico discreto definido por la recurrencia

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0, \quad (1.3)$$

donde  $x_n = x(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Obsérvese que  $x_n = f^n(x_0) \forall n \geq 1$ , donde  $f^n$  es la  $n$ -ésima iterada de  $f$ , obtenida componiendo  $f$  consigo misma  $n$  veces. Una buena

referencia para ver de forma resumida la relación entre las soluciones de (1.2) y (1.3) es el trabajo de Ivanov y Sharkovsky [14]. Para profundizar más en las propiedades de las soluciones de (1.2) basadas en la dinámica de (1.3), se puede consultar la monografía [27]. En particular, la ecuación (1.2) sólo presenta una dinámica tan simple como la de (1.1) si el sistema dinámico discreto (1.3) tiene un único punto fijo globalmente atractor. En este caso, todas las soluciones de (1.2) son *asintóticamente constantes*, con límite cero. La existencia de puntos periódicos de  $f$  con períodos mayores o iguales que 2 da lugar a la aparición de soluciones de (1.2) de naturaleza más complicada, llamadas *de tipo relajado* (que están ligadas a puntos de período 2 de  $f$  y se caracterizan por tener frecuencias de oscilación constantes en cada intervalo de longitud unidad) y *de tipo turbulento* (ligadas a puntos periódicos de  $f$  con períodos mayores que 2 y caracterizadas por tener frecuencias de oscilación crecientes y no acotadas).

En este trabajo mostramos una manera de «conectar» las ecuaciones (1.1) y (1.2) mediante una familia de ecuaciones diferenciales con retraso, de tal manera que (1.1) y (1.2) se pueden ver como los «extremos opuestos» de dicha ecuación considerada como una familia parametrizada con la variable de retardo. Bajo ciertas condiciones adicionales sobre  $f$ , se puede observar una «transición suave» entre las dinámicas de ambas ecuaciones.

Así, consideremos la familia de ecuaciones

$$x'(t) = -x(t) + f(x(t-r)), \quad (1.4)$$

donde  $r > 0$  es un parámetro de retardo. Esta ecuación aparece como modelo en muchos fenómenos en campos como la biología, fisiología y economía (véase, por ejemplo, [13]). Entre los modelos más célebres están los siguientes:

- La ecuación de Nicholson, propuesta en [6] para explicar las fluctuaciones oscilatorias de poblaciones de insectos observadas por el entomólogo A. J. Nicholson en 1957:

$$x'(t) = -\delta x(t) + px(t-r)e^{-\gamma x(t-r)}, \quad \delta, p, \gamma, r > 0. \quad (1.5)$$

- Los modelos de células sanguíneas propuestos por Mackey y Glass en [24] para explicar los comportamientos en ciertas enfermedades como la leucemia:

$$x'(t) = -\delta x(t) + p \frac{[x(t-r)]^\alpha}{1 + [x(t-r)]^n}, \quad \delta, p, r > 0, \quad n > 1, \quad \alpha \in \{0, 1\}. \quad (1.6)$$

- El modelo para la supervivencia de glóbulos rojos en un animal propuesto por Lasota y Wazewska-Czyzewska en [33]:

$$x'(t) = -\delta x(t) + pe^{-\gamma x(t-r)}, \quad \delta, p, \gamma, r > 0. \quad (1.7)$$

Todas estas ecuaciones se pueden escribir en la forma (1.4), con  $f(0) = 0$ , tras un cambio de variable (se pueden consultar los detalles en [22]).

Obviamente, (1.4) se reduce a la ecuación ordinaria (1.1) en el caso límite  $r = 0$ . Por otra parte, el cambio de escala en la variable temporal  $t \mapsto rt$  transforma la ecuación (1.4) en

$$\varepsilon x'(t) = -x(t) + f(x(t-1)), \tag{1.8}$$

donde  $\varepsilon = 1/r$ . Esta forma de la ecuación (1.4) recibe el nombre de ecuación con retraso *singularmente perturbada*, y también se obtiene como la reducción de un problema de frontera para un sistema lineal de ecuaciones en derivadas parciales con condición de contorno no lineal (véase [27]). El caso límite de (1.8) cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $r \rightarrow \infty$ ) proporciona la ecuación en diferencias con argumento continuo (1.2). En este trabajo utilizaremos las dos formas equivalentes de la ecuación diferencial con retraso.

Ambos extremos de la ecuación (1.4) han sido más ampliamente estudiados en la literatura que la propia ecuación diferencial con retraso, y por ello han tratado de utilizarse sus propiedades para obtener resultados similares para (1.4) cuando el retraso es suficientemente pequeño o cuando es muy grande. En el primero de los casos se sitúa la célebre frase «small delays do not matter» (*los retrasos pequeños no importan*), que indica que la dinámica de (1.4) con  $r$  pequeño no debería ser muy diferente de la de la ecuación ordinaria (1.1). En este sentido se han obtenido muchos resultados (véanse, por ejemplo, las monografías [1, 12, 16, 29]). Menos común ha sido el otro extremo, es decir, tratar de deducir propiedades de las soluciones de (1.4) análogas a las de la ecuación en diferencias (1.2), al menos cuando  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño. Quizá las referencias más significativas son los trabajos de Ivanov y Sharkovsky (véase [14]) y los de Mallet-Paret y Nussbaum [25, 26].

Dado que nos referiremos a las ecuaciones (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) y (1.8) en numerosas ocasiones a lo largo del texto, incluimos una tabla que las recoge conjuntamente para facilitar al lector su identificación en todo momento.

Etiqueta	Descripción	Ecuación
(1.1)	Ecuación diferencial ordinaria	$x'(t) + x(t) = f(x(t))$
(1.2)	Ecuación en diferencias con argumento continuo	$x(t) = f(x(t-1))$
(1.3)	Sistema dinámico discreto	$x_{n+1} = f(x_n)$
(1.4)	Ecuación diferencial con retraso	$x'(t) = -x(t) + f(x(t-r))$
(1.8)	Ecuación con retraso singularmente perturbada	$\varepsilon x'(t) = -x(t) + f(x(t-1))$

Tabla 1: Principales ecuaciones citadas en el texto.

Recuérdese que las relaciones entre las distintas ecuaciones son las siguientes:

- Las ecuaciones (1.4) y (1.8) son equivalentes para  $r > 0$  y  $\varepsilon > 0$  ( $\varepsilon = 1/r$ ).
- La ecuación (1.1) es la forma de (1.4) en el caso límite  $r = 0$ .
- La ecuación (1.2) es la forma de (1.8) en el caso límite  $\varepsilon = 0$ .
- La ecuación en diferencias (1.3) es la versión discreta de (1.2).

## 2. PRELIMINARES

En esta sección se introducen algunos de los conceptos y notaciones que serán usados en el resto del trabajo. Aunque todas las ecuaciones incluidas en la tabla 1 son autónomas (la función que las define depende sólo de la variable de estado y no de la variable independiente), sus espacios de fases (conjuntos donde «viven» las condiciones iniciales) son diferentes. Mientras que para las ecuaciones (1.1) y (1.3) estos conjuntos son unidimensionales, para las ecuaciones (1.2), (1.4) y (1.8) son de dimensión infinita; en efecto, en este caso es necesario definir una condición inicial en el intervalo  $[-1, 0]$  para poder construir una solución. Denotemos por  $C = C([-1, 0], \mathbb{R})$  el espacio de las funciones reales continuas definidas en  $[-1, 0]$ . Es bien sabido que  $C$  es un espacio de Banach con la norma uniforme  $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(t)| : t \in [-1, 0]\}$ . Si  $f$  es continua, para cada  $\varphi \in C$  existe una solución  $x(t) = x^\varphi(t)$  tal que  $x(t) = \varphi(t)$  para  $t \in [-1, 0]$ . Consideraremos que  $f$  es suficientemente regular para garantizar que esta solución es única y está definida en  $[-1, \infty)$  (se pueden encontrar condiciones de este tipo en [12]). En el caso de la ecuación (1.8), usaremos la notación  $x_\varepsilon^\varphi(t)$  para indicar la dependencia de  $\varepsilon$  y del dato inicial  $\varphi$ . Por  $x_0^\varphi(t)$  entenderemos la correspondiente solución de (1.2) con condición inicial  $\varphi$ .

El espacio de fases es el conjunto donde se estudia el comportamiento de las soluciones. Asociado a cada una de las ecuaciones (1.2), (1.4) y (1.8) se puede definir un semiflujo  $F : \mathbb{R}^+ \times C \rightarrow C$  en el espacio  $C = C([-1, 0], \mathbb{R})$  dado por  $F(t, \varphi) = x_t^\varphi$ , donde  $x_t^\varphi$  es el segmento entre  $t-1$  y  $t$  de la correspondiente solución  $x^\varphi$  con condición inicial  $\varphi$ , es decir,  $x_t^\varphi(s) = x^\varphi(t+s)$ ,  $s \in [-1, 0]$ . El análisis de este semiflujo es el que proporciona la dinámica de la ecuación. En particular, son importantes los conjuntos  $\omega$ -límite. Recordemos que el conjunto  $\omega$ -límite de una función  $\varphi \in C$  está definido por

$$\omega(\varphi) = \{\phi \in C : \text{existe una sucesión } \{t_n\} \rightarrow \infty \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n, \varphi) = \phi\}.$$

Para cada  $\varphi \in C$ ,  $\omega(\varphi)$  es un conjunto no vacío, compacto y conexo. El estudio de los conjuntos  $\omega$ -límite está íntimamente ligado con el comportamiento *a largo plazo* de las soluciones.

Uno de los conceptos claves en nuestra exposición es el de estabilidad. A continuación se incluyen algunas de las definiciones principales; para más detalles, consúltese el Capítulo 5 de [12].

Supongamos que  $c \in \mathbb{R}$  es una solución de la ecuación escalar  $f(c) = c$ . Entonces la función constantemente igual a  $c$  es una solución de cada una de las ecuaciones incluidas en la tabla 1 (en el caso de la ecuación (1.3) sería una sucesión constante). Se suele decir que  $c$  es un punto de equilibrio. Como ya hemos indicado, bajo las condiciones  $f(0) = 0$ ,  $xf(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , el único equilibrio es  $c = 0$ .

Las siguientes definiciones se enuncian para la ecuación (1.4), aunque son igualmente válidas para (1.2) y (1.8).

1. La solución  $x = 0$  de (1.4) es estable si, para cada  $\eta > 0$ , existe un  $\delta = \delta(\eta) > 0$  tal que  $\|x_t^\varphi\| < \eta$  para todo  $t \geq 0$  siempre que  $\|\varphi\| < \delta$ . Si  $x = 0$  no es estable, entonces diremos que es inestable.

2. La solución  $x = 0$  de (1.4) es asintóticamente estable si es estable y, además, existe un número  $b > 0$  tal que  $\|\varphi\| < b$  implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x^\varphi(t) = 0$ .
3. Diremos que la solución  $x = 0$  de (1.4) es un atractor global si todas las soluciones de la ecuación convergen a cero cuando  $t$  tiende a infinito.
4. Diremos que la solución  $x = 0$  de (1.4) es globalmente asintóticamente estable (o simplemente *globalmente estable*) si es un atractor global estable.

Estas nociones de estabilidad se pueden extender a otras soluciones de la ecuación (en particular, a las soluciones periódicas). Si  $p(t)$  es cualquier solución de (1.4), entonces  $p$  es estable (respectivamente inestable, asintóticamente estable o globalmente estable) si lo es la solución  $z = 0$  de la ecuación

$$z'(t) = -z(t) + f(z(t-r) + p(t-r)) - f(p(t-r)).$$

(Esta ecuación es no autónoma, de modo que la noción de estabilidad de la solución cero es un poco diferente, véase [12, p. 130].)

De modo análogo, en lo que respecta a la ecuación en diferencias (1.3), diremos que el equilibrio  $x = 0$  es estable si, para cada  $\eta > 0$ , existe un  $\delta = \delta(\eta) > 0$  tal que  $|x_n| < \eta$  para todo  $n \geq 0$  siempre que  $|x_0| < \delta$ ; es asintóticamente estable si es estable y existe un número  $b > 0$  tal que  $|x_0| < b$  implica que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . Como antes, el equilibrio  $x = 0$  es un atractor global si todas las soluciones de la ecuación convergen a cero. Es conocido que si  $f$  es continua entonces un atractor global de (1.3) es siempre estable. En consecuencia, los conceptos de equilibrio globalmente estable y globalmente atractor coinciden en este caso.

Para la ecuación (1.3) utilizaremos también el concepto de ciclo globalmente atractor. Un 2-ciclo es un par  $\{a, b\}$  de números reales tales que  $f(a) = b$ ,  $f(b) = a$ ,  $a \neq b$ . En este trabajo entenderemos que  $\{a, b\}$  es un 2-ciclo globalmente atractor si  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(x_0)$  es igual a  $a$  o  $b$  para todo  $x_0 \neq 0$ , aunque en ocasiones se entiende que es atractor global si atrae «casi todas» las soluciones, en un sentido topológico o de medida.

### 3. UNA ECUACIÓN LINEAL

Consideremos en primer lugar el caso más simple  $f(x) = -ax$ ,  $a > 0$ , en la ecuación (1.4). Para  $r = 0$ , todas las soluciones de (1.1) son funciones exponenciales que convergen a cero (de la forma  $x(t) = x(0)e^{-(a+1)t}$ ), mientras que para la ecuación en diferencias (1.3) las soluciones son de la forma  $x_{n+1} = (-a)^n x_0$ , con lo que, para  $a < 1$ , las soluciones convergen a cero, mientras que, para  $a > 1$ , todas las soluciones distintas de cero son no acotadas. Podemos explicar este cambio en la dinámica considerando que el parámetro de retardo induce una bifurcación que da lugar a la aparición de soluciones no acotadas cuando  $a > 1$ . En efecto, la forma de la ecuación (1.4) con  $f(x) = -ax$  es

$$x'(t) = -x(t) - ax(t-r). \tag{3.1}$$

La condición necesaria y suficiente para que todas las soluciones converjan a cero (esto es, para que la solución trivial sea asintóticamente estable) es que todas las raíces de la ecuación característica asociada

$$\lambda + 1 + ae^{-\lambda r} = 0 \quad (3.2)$$

tengan parte real negativa. Según el criterio de Hayes (véase [12]), la frontera de la región de estabilidad asintótica para (3.1) viene dada por las ecuaciones paramétricas

$$a = -1/\cos(z); \quad \varepsilon = -\tan(z)/z, \quad z \in (\pi/2, \pi).$$

En la figura 1 se representa esta curva en el plano  $(a, \varepsilon)$ . Nótese que la ecuación (1.2) corresponde al eje de abscisas ( $\varepsilon = 0$ ), mientras que la ecuación ordinaria (1.1) corresponde al caso límite  $\varepsilon = +\infty$  ( $r = 0$ ).

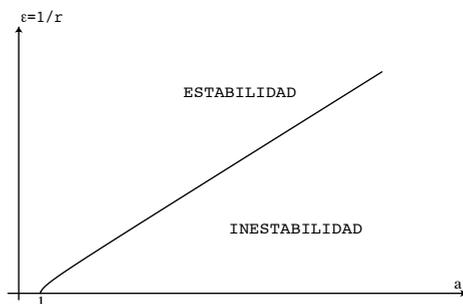


Figura 1: Frontera de estabilidad asintótica para (3.1).

Si denotamos por  $\varepsilon = \gamma(a)$  dicha curva, se tiene que, para cada  $a > 1$ , la ecuación (3.1) es asintóticamente estable si  $\varepsilon > \gamma(a)$ , e inestable si  $\varepsilon < \gamma(a)$ . Cuando  $\varepsilon = \gamma(a)$ , la ecuación característica (3.2) tiene dos soluciones imaginarias puras  $\pm ib_0(a)$  (donde  $b_0 \in (\pi/2, \pi)$  verifica  $\cos(b_0) = -1/a$ ), que dan lugar a una solución periódica de período  $\omega(a) = 2\pi/b_0(a)$ . En particular,  $\omega(a) \rightarrow 2$  cuando  $a \rightarrow 1$  y  $\omega(a) \rightarrow 4$  cuando  $a \rightarrow \infty$ . Estas propiedades serán de utilidad más adelante, para describir la bifurcación de Hopf en el caso no lineal.

#### 4. EL CASO NO LINEAL (I): ESTABILIDAD GLOBAL

Es fácil comprobar que la propiedad  $xf(x) \leq 0$  implica que el equilibrio  $x = 0$  es un atractor global de la ecuación diferencial ordinaria (1.1). Sin embargo, incluso para el caso en que el retraso es muy pequeño, son necesarias condiciones adicionales para asegurar que dicha propiedad se mantiene para (1.4). La referencia [31] proporciona ejemplos con funciones muy regulares de tal forma que (1.4) tiene soluciones periódicas no triviales para  $r$  arbitrariamente pequeño. Pasemos, pues, al extremo contrario y hagamos la siguiente pregunta: *¿se puede asegurar que la solución cero es globalmente atractora para (1.4) si lo es para la ecuación en diferencias (1.3)?*

La respuesta a esta pregunta es afirmativa y se deduce de un teorema de invariancia debido a Ivanov y Sharkovsky [14].

**TEOREMA 4.1** ([14, Teorema 2.2]). *Supongamos que  $f$  es continua y  $0$  es un atractor global de (1.3), es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = 0$  para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Entonces, para todo  $\varepsilon > 0$  y toda  $\varphi \in C$  se verifica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_\varepsilon^\varphi(t) = 0$ , es decir, cero es un atractor global para (1.8).*

El recíproco de este teorema no es cierto: existen funciones  $f$  para las cuales  $x = 0$  es un atractor global para (1.8) para todo  $\varepsilon > 0$ , y sin embargo la dinámica de (1.2) es mucho más complicada. Un ejemplo de esta situación está descrito con todo detalle en la Sección 5 de [14], y se obtiene definiendo  $f(x) = 0$  si  $|x| \leq h$ , y de manera arbitraria fuera de  $[-h, h]$ , con la única condición de que sea regular y no tenga puntos fijos distintos de 0. De esa forma, escogiendo  $h \in (1/2, 1)$ , se puede probar que la solución cero es un atractor global de (1.8) independientemente del valor de  $\varepsilon > 0$ . Sin embargo, se puede construir  $f$  de tal forma que tenga ciclos de período mayor que 2 que dan lugar a soluciones de (1.2) de tipo turbulento.

Un problema relacionado con la estabilidad global de (1.4) es encontrar condiciones sobre  $f$  que garanticen que la estabilidad asintótica del equilibrio implique su estabilidad global. Este tipo de comportamiento se ha observado en modelos de población y ha dado lugar a varias conjeturas relacionadas. La más famosa es la conjetura de Wright, enunciada para la ecuación logística con retardo

$$y'(t) = py(t) \left( 1 - \frac{y(t-r)}{K} \right), \quad (4.1)$$

donde  $p$  y  $K$  son constantes positivas. Tras un cambio de variable, la ecuación (4.1) se transforma en

$$x'(t) = f(x(t-1)), \quad (4.2)$$

con  $f(x) = pr(e^{-x} - 1)$ . La conjetura de Wright establece que la estabilidad local del equilibrio  $x = 0$  en (4.2) implica su estabilidad global; esto equivale a decir que todas las soluciones positivas de la ecuación logística (4.1) convergen al equilibrio positivo  $x = K$  si éste es asintóticamente estable. Esta conjetura permanece como problema abierto desde 1955, fecha de la publicación del célebre artículo de E. M. Wright [34] (para más detalles, véase [21]). Un problema similar para la ecuación de Nicholson (1.5) fue planteado por H. L. Smith en [29]. En [22] se hace un estudio de este problema en un marco más general y se formula una conjetura más ambiciosa. Volveremos sobre esta cuestión en la Sección 6.

## 5. EL CASO NO LINEAL (II): SOLUCIONES PERIÓDICAS

Como hemos comentado en la sección anterior, existen ejemplos de funciones  $f$  para las cuales la ecuación (1.8) tiene una dinámica muy sencilla para cualquier  $\varepsilon > 0$  y, sin embargo, la «ecuación límite» (1.2) presenta una dinámica complicada. También existen ejemplos en el sentido contrario, es decir, es posible construir funciones continuas  $f$ , próximas a funciones constantes a trozos, para las cuales el

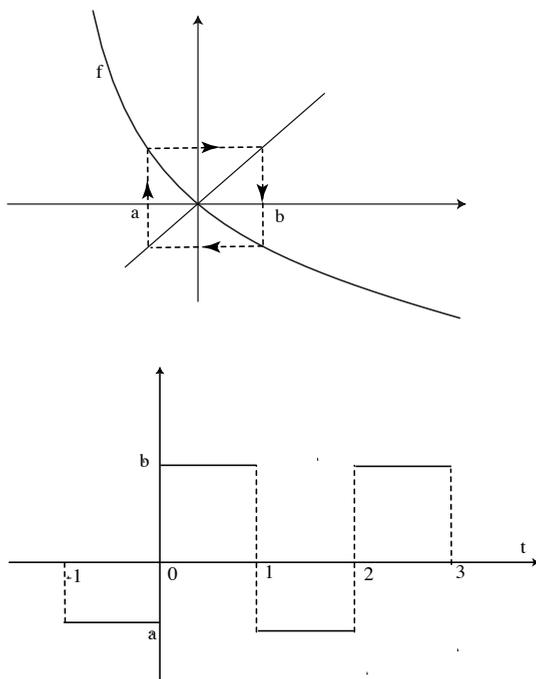


Figura 2: Ciclo de período 2 para  $f$  y onda cuadrada.

sistema dinámico discreto (1.3) tiene un 2-ciclo globalmente atractor y, sin embargo, la ecuación con retardo (1.8) presenta conducta caótica para cualquier valor de  $\varepsilon$  suficientemente pequeño (véase el ejemplo 4.4 en [14] y el Teorema 6.1 en [13]). Para el lector interesado en el comportamiento caótico de ecuaciones diferenciales con retraso, recomendamos el trabajo de B. Lani-Wayda [17].

Este tipo de ejemplos muestra que, a diferencia de lo que ocurre con puntos fijos globalmente atractores de  $f$ , no podemos esperar, en general, que un 2-ciclo globalmente atractor para  $f$  induzca la misma dinámica en la ecuación con retraso (1.8). Uno de los problemas planteados por Ivanov y Sharkovsky en [14] es, precisamente, encontrar condiciones sobre  $f$  que garanticen que, si (1.3) tiene un 2-ciclo globalmente atractor, entonces (1.8) tiene una solución periódica atractora «próxima a ese ciclo» para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. Observemos que un 2-ciclo  $\{a, b\}$  de  $f$  da lugar a una solución periódica de la ecuación en diferencias con argumento continuo (1.2) definida por  $x(t) = a$  si  $t \in [2k - 1, 2k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , y  $x(t) = b$  en otro caso. Esta solución recibe el nombre de «onda cuadrada». En la figura 2 se representa un 2-ciclo de  $f$  y la onda cuadrada de (1.2) a la que da lugar.

Nuestro objetivo en esta sección es describir una situación para la cual la transición entre la simple dinámica de la EDO (1.1) y la del sistema dinámico discreto (1.3) es «suave», con lo cual excluiríamos los casos con comportamiento caótico. Para ello, vamos a imponer varias hipótesis sobre la función  $f$ . Cabe destacar que estas con-

diciones vienen motivadas por las aplicaciones a modelos concretos; típicamente, la no-linealidad  $f$  que aparece en la ecuación (1.4) en sus aplicaciones en biología y fisiología (véanse los ejemplos en la introducción) verifica las dos siguientes condiciones:

(H1) (Continuidad y acotación):  $f$  es continua y está acotada inferiormente.

(H2) (*Feed-back* negativo):  $xf(x) < 0$  para todo  $x \neq 0$ .

### 5.1. EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIÓDICAS Y ATRACTOR GLOBAL

Empezaremos con un resultado de existencia de soluciones periódicas, debido a Haderler y Tomiuk.

**TEOREMA 5.1** ([7, Teorema 1]). *Supongamos que  $f$  verifica (H1), (H2),  $f$  es diferenciable en  $x = 0$  y  $f'(0) < -1$ . Entonces la ecuación (1.8) tiene una solución periódica no constante  $p_\varepsilon(t)$  para cada valor de  $\varepsilon < \gamma(a)$ , donde  $a = -f'(0)$  y  $\gamma(a)$  es la curva de estabilidad local representada en la figura 1.*

Este teorema prueba que la ecuación (1.4) tiene una solución periódica no constante siempre que su ecuación linealizada en torno a cero sea inestable. Nótese que dicha ecuación linealizada tiene la forma de la ecuación lineal (3.1) con  $a = -f'(0)$ . Una observación importante que se puede deducir de la demostración de este teorema es que la solución periódica  $p_\varepsilon(t)$  verifica la propiedad de que la distancia entre dos ceros consecutivos es mayor que el retardo. Dichas soluciones se llaman *soluciones periódicas lentamente oscilantes* (en el futuro, SPLO) y, como veremos, tienen una especial importancia.

Aunque el teorema de Haderler y Tomiuk no requiere que  $f$  sea estrictamente decreciente, nos restringiremos en lo que sigue a este caso, ya que, como fue mostrado por Lani-Wayda y Walther en [18], una función regular verificando (H1) y (H2) que no sea monótona puede dar lugar a dinámica caótica en la ecuación (1.4). También es conocido que el sistema dinámico discreto (1.3) con  $f$  unimodal puede tener comportamiento caótico. Así pues, introducimos la hipótesis

(H3) (Monotonía):  $f$  es de clase  $C^1$  y  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Nótese que las condiciones (H1)–(H3) no son artificiales. Por ejemplo, las verifican (tras un cambio de variables) las no-linealidades de la ecuación de Lasota y Wazewska (1.7) y la de Mackey y Glass (1.6) con  $\alpha = 0$ .

A continuación comentamos una serie de resultados sobre la dinámica de la ecuación (1.8) cuando  $f$  verifica (H1)–(H3). Los enunciados completos de estos resultados se pueden consultar en [30] (véanse también [5, 15]). Uno de los resultados de Walther establece que existe un atractor global compacto, es decir, un subconjunto  $A$  compacto y no vacío de  $C$  que es invariante para el semiflujo  $F$  (es decir,  $F(t, A) = A$  para todo  $t > 0$ ) y atrae conjuntos acotados, en el sentido de que para cada conjunto acotado  $B \subset C$  y para cada abierto  $U$  conteniendo a  $A$  existe un  $t \geq 0$  tal que  $F(s, B) \subset U$  para todo  $s \geq t$ . Se puede caracterizar  $A$  como el conjunto de las funciones  $\varphi \in C$  para las cuales existe una solución acotada  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la ecuación (1.8) tal que  $\varphi = x_t$  para algún  $t \in \mathbb{R}$ . El comportamiento de las soluciones a largo plazo

viene determinado por la dinámica en el conjunto  $A$ . En particular, los conjuntos  $\omega$ -límite de las funciones  $\varphi \in C$  están contenidos en el atractor global. Para ver más propiedades de atractores globales, se puede consultar la monografía [8].

Las soluciones lentamente oscilantes (es decir, aquéllas cuyos ceros consecutivos están separados una longitud mayor que el retraso) juegan un papel fundamental debido al hecho de que el conjunto  $C_S$  de las funciones  $\varphi$  para las cuales  $x^\varphi$  es lentamente oscilante en algún intervalo no acotado es un abierto denso de  $C$ . Asociado a estas soluciones, consideramos el conjunto  $S$  de las funciones no nulas de  $C$  que tienen a lo sumo un cambio de signo en  $[-1, 0]$ . Entonces el conjunto  $S$  absorbe un conjunto abierto y denso de  $C$  bajo el semiflujo  $F$ . Además, tanto  $S$  como su clausura  $\bar{S} = S \cup \{0\}$  son invariantes por  $F$ . Esto permite definir la restricción del semiflujo  $F$  a  $\bar{S}$ , que también tiene un atractor global compacto  $A_S \subset A$ . Las observaciones anteriores permiten afirmar que la dinámica en  $A_S$  gobierna el comportamiento a largo plazo de las soluciones de la ecuación (1.8). El resultado principal de [30] (véase también [32]) dice que, o bien el atractor global  $A$  es  $\{0\}$ , o bien es un grafo 2-dimensional de clase  $C^1$ , homeomorfo a un disco cerrado de  $\mathbb{R}^2$  y cuyo borde es la órbita correspondiente a una SPLO. En particular, puede afirmarse que *el comportamiento a largo plazo de las soluciones de (1.8) está gobernado por un campo de vectores regular en el plano* ([5, p. 429]).

Otro de los resultados de Walther para la ecuación (1.8) es un teorema de tipo Poincaré-Bendixson. En el Capítulo 10 de [30] se prueba que si  $f$  verifica (H1)–(H3) entonces, para cada  $\varphi$  en el atractor  $A_S$ , el conjunto  $\omega$ -límite  $\omega(\varphi)$  es  $\{0\}$  o bien una órbita periódica (formada por los segmentos de una SPLO). Otra versión de este resultado aplicada al atractor  $A$  (véase, por ejemplo, [15, Proposición 3]) permite afirmar que  $\{0\}$  es un atractor global de (1.8) si y sólo si no existen soluciones periódicas no triviales de la ecuación.

## 5.2. UN CONTINUO DE SOLUCIONES PERIÓDICAS

Los resultados anteriores muestran que, siempre que la solución cero es inestable para la ecuación (1.8), existe una SPLO. Además, este tipo de soluciones atraen todas las soluciones con condiciones iniciales en un conjunto abierto y denso de  $C$ .

En esta subsección volvemos a considerar de nuevo la situación global, con lo que nos fijaremos en la familia de ecuaciones (1.8) tomando  $\varepsilon$  como parámetro de bifurcación. Bajo las hipótesis (H1)–(H3), es fácil ver que el sistema dinámico discreto (1.3) tiene un intervalo compacto invariante  $[-B, A]$  (es decir,  $f([-B, A]) \subset [-B, A]$ ), con  $A > 0$ ,  $B > 0$ . Se pueden tomar, por ejemplo,  $-B = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  y  $A = f(-B)$ . Además, es claro que, para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$ , existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(x_0) \in [-B, A]$  para todo  $n \geq n_0$ . Por tanto, la dinámica a largo plazo de (1.3) se puede restringir a dicho intervalo. Si  $|f'(0)| > 1$ , el punto fijo  $x = 0$  es inestable y, como  $[-B, A]$  es invariante, debe existir un 2-ciclo  $\{a, b\}$  de  $f$ . La dinámica más simple posible se tiene cuando 0 es globalmente atractor para (1.3) si  $|f'(0)| \leq 1$  y el 2-ciclo  $\{a, b\}$  es globalmente atractor para  $|f'(0)| > 1$ . Esta situación se produce si añadimos a nuestra lista de condiciones la siguiente:

(H4) (Derivada Schwarziana negativa):  $f$  es de clase  $C^3$  y  $(Sf)(x) < 0$  para todo

$x \in \mathbb{R}$ , donde

$$(Sf)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

es la derivada Schwarziana de  $f$ .

La derivada Schwarziana aparece en diferentes áreas de las Matemáticas. Fue introducida por H. Schwarz en 1869 en un trabajo sobre aplicaciones conformes y pasó a ser una herramienta de especial importancia en el estudio de los sistemas dinámicos discretos a raíz de un célebre trabajo de D. Singer [28] en 1978. Una de sus aplicaciones más conocidas es que, aunque los sistemas discretos generados por la célebre familia logística  $f_a(x) = ax(1 - x)$  pueden tener órbitas periódicas de cualquier período para algunos de los valores del parámetro  $a$ , sólo una de ellas puede ser atractora (véase la Sección 1.11 de [4]).

Otra de las consecuencias de los resultados de Singer es que, bajo las hipótesis (H1)–(H4), la condición  $|f'(0)| \leq 1$  implica que 0 es un atractor global de (1.3) (se puede ver una demostración de este resultado en [22]). El razonamiento para probar que  $\{a, b\}$  es globalmente atractor cuando 0 es inestable es sencillo: como  $f$  es estrictamente decreciente entonces  $f^2 = f \circ f$  es estrictamente creciente; en particular,  $f^2$  no puede tener puntos periódicos que no sean puntos fijos. Entonces el teorema de Sharkovsky asegura que  $f$  no puede tener ciclos de período mayor que 2. Finalmente, la hipótesis (H4) excluye la posibilidad de que  $f$  tenga más de un ciclo de período 2 no trivial (esto se puede deducir también de los resultados de Singer, véase [4, Lema 11.5]). La existencia del intervalo compacto atractor  $[-B, A]$  y la inestabilidad del punto fijo  $x = 0$  permiten concluir que el ciclo de período 2 es globalmente atractor.

Merece la pena insistir en que la hipótesis (H4) tampoco es artificial; por ejemplo, también la verifican los modelos de Mackey-Glass y Lasota-Wazewska mencionados antes (véanse, por ejemplo, [22, 26]). Los resultados que establecemos a continuación se deben a Mallet-Paret y Nussbaum [25, 26] y permiten relacionar el 2-ciclo de (1.3) con las SPLO's de (1.8).

La primera observación es que existe una bifurcación de Hopf en la frontera de estabilidad local de (1.8). Más concretamente, fijemos un valor de  $|f'(0)| > 1$ ; según los resultados de la Sección 3, existe un valor  $\varepsilon_0$  tal que la solución cero es asintóticamente estable si  $\varepsilon > \varepsilon_0$  e inestable si  $\varepsilon < \varepsilon_0$ . Para  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , la ecuación característica asociada a la ecuación linealizada tiene un par de soluciones con parte real cero  $\lambda = \pm ib_0$ . Los valores de  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\lambda)$  y  $b_0 = b_0(\lambda)$  son únicos bajo la condición  $b_0 \in (\pi/2, \pi)$ . De hecho, se obtienen de las relaciones

$$\cos(b_0) = \frac{-1}{|f'(0)|}, \quad \varepsilon_0 = \frac{(|f'(0)|^2 - 1)^{1/2}}{b_0}. \tag{5.1}$$

Sea  $r = 1/\varepsilon$ . Se verifica que  $x = 0$  es asintóticamente estable para  $r < r_0 = 1/\varepsilon_0$  ( $\varepsilon > \varepsilon_0$ ), y para  $r = r_0$  las soluciones  $\lambda = \pm ib_0$  son raíces simples de la ecuación característica, son las únicas raíces en el eje imaginario, y lo cruzan transversalmente cuando  $r$  crece. Estos resultados permiten aplicar el Teorema de bifurcación de

Hopf (véase, por ejemplo, [12]) y por tanto existe una rama (local) de soluciones periódicas de (1.8) desde  $(r, x) = (r_0, 0)$ . En particular,  $b_0 < \pi$  implica que la autofunción correspondiente  $x(t) = \cos(b_0 t)$  tiene ceros consecutivos separados una distancia  $\pi/b_0 > 1$  (por tanto es una SPLO de la ecuación linealizada). De hecho,  $\varepsilon_0$  es el único valor de  $\varepsilon > 0$  para el que existe tal solución. Mallet-Paret y Nussbaum prueban en [25, 26] que en realidad existe una bifurcación global desde  $(r_0, 0)$ , que da lugar a un continuo de SPLO's cuya forma se aproxima a la de la onda cuadrada definida por el 2-ciclo  $\{a, b\}$  cuando  $r \rightarrow \infty$  (equivalentemente, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). El siguiente resultado es una consecuencia de los teoremas 2.1–2.3 de [26].

TEOREMA 5.2 ([26]). *Supongamos que  $f$  verifica (H1)–(H3) y  $|f'(0)| > 1$ . Sea  $\varepsilon_0$  definido en (5.1). Entonces:*

- (1) *Para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  la ecuación (1.8) tiene una SPLO  $x_\varepsilon$  verificando  $x_\varepsilon(t) \in [-B, A]$  para todo  $t > 0$ .*
- (2) *Si además  $f$  verifica (H4), entonces podemos tomar  $[-B, A] = [a, b]$  (donde  $\{a, b\}$  es el 2-ciclo globalmente atractor de  $f$ ) y la forma de cualquier SPLO en  $[a, b]$  se aproxima a una onda cuadrada  $p(t)$  del siguiente modo: dado  $\delta > 0$  existen  $\tilde{\varepsilon} > 0$  y  $K > 0$  tales que, si  $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$ , entonces  $|x_\varepsilon(t) - p(t)| \leq \delta$  en  $[K\varepsilon, z_1 - K\varepsilon] \cup [z_1 + K\varepsilon, z_2]$ , donde  $0, z_1, z_2$  son tres ceros consecutivos de  $x_\varepsilon$  (la solución es  $z_2$ -periódica). Además, la convergencia es muy regular, en el sentido de que la SPLO tiene sólo dos intervalos de monotonía en cada período.*

Este teorema establece que las SPLO's que «nacen» en la bifurcación de Hopf se transforman «suavemente» en una onda cuadrada de la ecuación en diferencias con argumento continuo (1.2).

### 5.3. DOBLAMIENTO DE PERÍODO

Los resultados de [25, 26] se pueden aplicar a funciones que sólo verifiquen las condiciones (H1)–(H4) en un entorno de cero, esto es, suponiendo que

(HL) (Condiciones locales):  $f$  es de clase  $C^3$  en un entorno de cero,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) < 0$  y  $(Sf)(0) < 0$ .

Esto permite relacionar, localmente, la bifurcación de Hopf en (1.8) para valores de  $|f'(0)|$  cercanos a 1, con una bifurcación de doblamiento de período que tiene lugar para el sistema discreto (1.3) cuando  $f'(0)$  pasa el valor crítico  $-1$ .

Para describir la variación de la dinámica en el sistema discreto (1.3), lo reescribimos en la forma

$$x_{n+1} = (1 + \lambda)f(x_n), \quad (5.2)$$

con  $f'(0) = -1$ . Según el teorema que describe la bifurcación de doblamiento de período para aplicaciones escalares (véase, por ejemplo, [11, Teorema 3.21]), las condiciones (HL) implican que la familia uniparamétrica  $F_\lambda(x) = (1 + \lambda)f(x)$  experimenta una bifurcación de doblamiento de período supercrítica en el punto  $(\lambda, x) = (0, 0)$ ; es decir, existe un entorno de  $(0, 0)$  en el plano  $(\lambda, x)$  tal que, para cada  $\lambda > 0$ , existe un único 2-ciclo de  $F_\lambda(x) = (1 + \lambda)f(x)$ , y, para  $\lambda < 0$ , no existe ninguno. Además, el

2-ciclo es asintóticamente estable. Los resultados de Mallet-Paret y Nussbaum permiten deducir, para un  $\delta > 0$  y  $|f'(0)| \in (1, 1 + \delta)$  fijo, la existencia de un continuo de soluciones periódicas  $p_\varepsilon^\lambda(t)$  de (1.8) que nacen en la bifurcación de Hopf y cuya forma se aproxima regularmente a la de la solución 2-periódica de (1.3) que surge de la bifurcación de doblamiento de período.

En [3], Chow, Hale y Huang consideran un problema similar suponiendo que  $f$  es una función impar (véanse también [9, 10]) y prueban que el período  $\omega_\varepsilon^\lambda$  de las soluciones  $p_\varepsilon^\lambda$  es aproximadamente 2; en concreto,  $\omega_\varepsilon^\lambda = 2 + 2\varepsilon + O(|\varepsilon|(|\lambda| + |\varepsilon|))$  cuando  $(\lambda, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)$ . Recuerdese que la onda cuadrada tiene período 2.

## 6. UNA TRANSICIÓN MUY SUAVE

En este punto, hemos relacionado la dinámica de la ecuación con retardo (1.8) con la de su ecuación en diferencias límite (1.2) cuando ésta tiene un 2-ciclo globalmente atractor. Además, hemos visto la relación entre la bifurcación de Hopf para la primera y la correspondiente bifurcación de doblamiento de período para el sistema dinámico discreto (1.3). Sin embargo, para obtener la transición suave anunciada entre la dinámica de la ecuación ordinaria (1.1) y la de la ecuación en diferencias (1.2), necesitamos resolver dos cuestiones:

- (C1) (Estabilidad local y global): ¿Podemos asegurar que la estabilidad asintótica local del equilibrio  $x = 0$  en (1.8) implica su estabilidad global?
- (C2) (Unicidad de soluciones periódicas): ¿Podemos afirmar que la solución periódica  $x_\varepsilon$  dada por el Teorema 5.2 es la única SPLO y es atractora para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ?

Fijemos un valor concreto de  $f'(0)$ . Si  $|f'(0)| \leq 1$  entonces, bajo las hipótesis (H1)–(H4), el Teorema 4.1 permite afirmar que cero es atractor global para (1.8) independientemente del valor de  $\varepsilon \geq 0$ . Supongamos ahora que  $|f'(0)| > 1$ ; si la respuesta a las cuestiones (C1) y (C2) es afirmativa, entonces la situación es la siguiente:

- Todas las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria (1.1) convergen a cero.
- Esta situación se mantiene para la ecuación con retardo (1.4) mientras  $r$  es suficientemente pequeño.
- Cuando el parámetro de retardo alcanza un valor crítico  $r_0 = 1/\varepsilon_0$  (véase (5.1)), el equilibrio  $x = 0$  se vuelve inestable y aparece una solución periódica no trivial de la ecuación (1.4) en una bifurcación de Hopf (supercrítica respecto al parámetro de retardo).
- Para todo  $r > r_0$ , la ecuación (1.4) tiene una única solución periódica lentamente oscilante (excepto traslaciones)  $x_\varepsilon(t)$  que atrae (orbitalmente) todas las soluciones correspondientes a condiciones iniciales en un abierto denso de  $C$ .
- En el caso límite  $r = \infty$  ( $\varepsilon = 0$ ), todas las soluciones distintas de cero de la ecuación (1.2) convergen a una onda cuadrada  $p(t)$  definida por un ciclo de  $f$  de período 2. Además, la forma de las SPLO's  $x_\varepsilon(t)$  converge a la forma de la onda cuadrada  $p(t)$  de manera muy regular.

Obsérvese que no podemos esperar que la SPLO  $x_\varepsilon(t)$  sea atractora en el sentido global en el que lo es el ciclo de período 2 para (1.3). Esto es debido a que, en general, la ecuación (1.8) tendrá soluciones periódicas rápidamente oscilantes que aparecen en relación con otras raíces imaginarias puras de la ecuación característica (3.2) (para más detalles, véase [25, Sección 2]).

Lamentablemente, en este momento no podemos garantizar que las respuestas a las cuestiones (C1) y (C2) sean afirmativas para  $f$  en las condiciones (H1)–(H4). Por el momento, dejamos esto como una conjetura en los siguientes términos:

CONJETURA 6.1. *Supongamos que  $f$  verifica las hipótesis (H1)–(H4). Entonces:*

1. *El equilibrio  $x = 0$  es globalmente atractor para la ecuación (1.8) siempre que sea asintóticamente estable, es decir, para todo  $\varepsilon > 0$  si  $|f'(0)| \leq 1$ , y para  $\varepsilon > \varepsilon_0$  si  $|f'(0)| > 1$ , donde  $\varepsilon_0$  fue definido en (5.1).*
2. *Para  $|f'(0)| > 1$  y  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , existe una única SPLO de (1.8), que atrae todas las soluciones lentamente oscilantes y cuya forma se aproxima a la onda cuadrada de (1.2) definida por el 2-ciclo globalmente atractor de  $f$ .*

OBSERVACIÓN 6.2. En virtud del teorema de tipo Poincaré-Bendixson mencionado en la Sección 5.2, podemos afirmar que la primera parte de la conjetura es cierta si y sólo si la ecuación (1.8) no tiene soluciones periódicas no triviales para  $\varepsilon > \varepsilon_0$ .

En lo que sigue, comentamos algunos aspectos que apoyan la conjetura. Por una parte, recordaremos algunos resultados de [22], donde la cuestión (C1) fue abordada en un marco más general; por otra parte, utilizando los resultados de unicidad de [2] y [15], veremos que es posible contestar afirmativamente a las cuestiones (C1) y (C2) si imponemos condiciones adicionales a  $f$ .

### 6.1. ESTABILIDAD GLOBAL REVISITADA

La primera parte de la Conjetura 6.1 fue formulada en [22] (véase también [19]); de hecho, el enunciado en esos trabajos es más ambicioso, ya que se permite que  $f$  sea unimodal en lugar de estrictamente decreciente. El resultado principal de [22] (Teorema 1.1) permite extender el célebre resultado de estabilidad global para la ecuación logística con retraso (4.1) dado por Wright en [34] a ecuaciones de la forma (1.8), incluyendo los modelos de la Sección 1 tanto para  $f$  decreciente como unimodal (este último caso fue completado con el Teorema 2.1 de [23]). En particular, la siguiente proposición es una consecuencia de los resultados de [22].

PROPOSICIÓN 6.3. *Supongamos que  $f$  verifica (H1)–(H4). Entonces la solución cero de (1.8) es globalmente estable si  $|f'(0)| \leq 1$  o si  $|f'(0)| > 1$  y  $\varepsilon > \varepsilon_1(-f'(0))$ , donde, para cada  $a > 1$ ,*

$$\varepsilon_1(a) = \left( -\ln \left[ a \ln \left( \frac{a^2 + a}{a^2 + 1} \right) \right] \right)^{-1}. \quad (6.3)$$

En la figura 3 se representa la proximidad entre la curva  $\varepsilon_1(a)$  y la curva  $\gamma(a)$  que marca la frontera de estabilidad local del equilibrio, lo que representa un apoyo a la veracidad de la primera parte de la Conjetura 6.1.

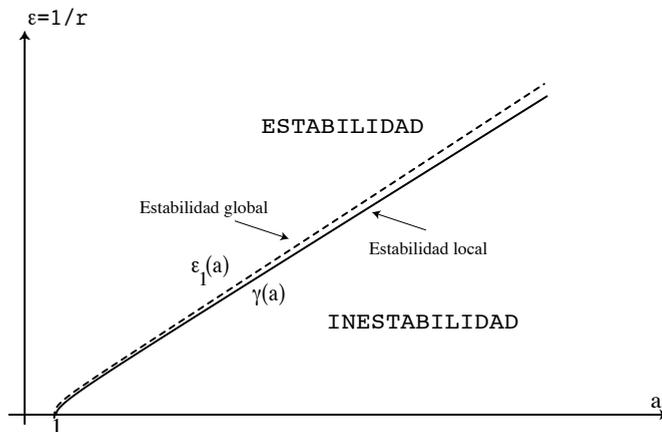


Figura 3: Estabilidad local y global para (1.4).

### 6.2. UNICIDAD DE SOLUCIONES PERIÓDICAS

En esta última sección veremos que se puede dar una respuesta afirmativa a las cuestiones (C1) y (C2) si sustituimos la hipótesis (H4) por otra diferente. En efecto, una de las consecuencias de los resultados obtenidos por Krisztin en [15] es el siguiente teorema:

TEOREMA 6.4. *Supongamos que  $f$  verifica (H1)–(H3) y, además,*

(H5) (*Simetría*): *la función  $f$  es impar, es decir,  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

(H6) *La función  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = xf'(x)/f(x)$  es estrictamente decreciente.*

*Supongamos que  $|f'(0)| > 1$  y sea  $\varepsilon_0$  definido en (5.1). Entonces la ecuación (1.8) no tiene soluciones periódicas no triviales si  $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ , y tiene una única SPLO  $x_\varepsilon(t)$  para cada  $\varepsilon < \varepsilon_0$ .*

Este resultado prueba que, para la familia de ecuaciones (1.8) que verifican (H1), (H2), (H3), (H5) y (H6), se produce la «transición suave» descrita al principio de la Sección 6. Terminamos con unas observaciones sobre las nuevas hipótesis introducidas en el Teorema 6.4.

#### OBSERVACIÓN 6.5.

1. Las no-linealidades correspondientes a las ecuaciones de Mackey-Glass y Lasota-Ważewska verifican (H4) y, sin embargo, no verifican (H5) ni (H6). Algunos ejemplos de funciones en las condiciones del Teorema 6.4, son los siguientes:

$$f(x) = -\alpha \tanh(\beta x); \quad f(x) = -\alpha \operatorname{arc\,tg}(\beta x), \tag{6.4}$$

con  $\alpha > 0, \beta > 0$ .

2. La hipótesis (H5) no parece ser esencial. De los resultados de Cao en [2] se puede obtener un resultado similar al Teorema 6.4 eliminando la hipótesis (H5) y sustituyendo (H6) por
 

(H6') La función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = xf'(x)/f(x)$  es estrictamente decreciente para  $x > 0$ , estrictamente creciente para  $x < 0$ , y verifica  $g(x) < 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
3. La hipótesis (H5) implica una propiedad de simetría para las SPLO's  $x_\varepsilon(t)$ . En concreto, se verifica que  $x_\varepsilon(t + \omega/2) = -x_\varepsilon(t)$  para todo  $t > 0$ , donde  $\omega$  es el período.
4. Como se muestra en el ejemplo siguiente, (H5)–(H6) no implican (H4), aunque las funciones  $f$  en (6.4) sí verifican (H4). Sin embargo, (H5)–(H6) garantizan, al igual que (H4), que el sistema dinámico discreto (1.3), con  $f$  verificando (H1)–(H3), tiene un punto fijo (cero) globalmente atractor si  $|f'(0)| \leq 1$ , y un 2-ciclo globalmente atractor si  $|f'(0)| > 1$ . Esto se deduce del hecho de que la segunda iterada  $f^2$  de  $f$  es una función creciente y verifica  $x(f^2)''(x) < 0$  para todo  $x \neq 0$ .

EJEMPLO 6.6. Se considera la función  $f(x) = \text{sgn}(x) \ln(1 + |x|)$ , donde  $\text{sgn}(x) = 1$  si  $x \geq 0$  y  $\text{sgn}(x) = -1$  si  $x < 0$ . Es claro que  $f$  es impar y

$$g(x) = \frac{x}{(1+x)\ln(1+x)}, \quad x > 0,$$

es estrictamente decreciente. Por tanto  $f$  satisface (H5)–(H6). Sin embargo,  $(Sf)(x) = (2 + 2x)^{-2} > 0$  para todo  $x > 0$ , por lo que  $f$  no cumple (H4).

#### AGRADECIMIENTOS

1. Este trabajo se enmarca dentro del proyecto de investigación MTM2004-06652-C03-02, subvencionado por el M.E.C. y FEDER, y la acción integrada hispano-húngara HH2004-0018.
2. El autor ha tenido la suerte de que el artículo haya sido revisado por un *referee* muy profesional. De su cuidadosa lectura de una primera versión de este trabajo han surgido comentarios muy constructivos que han ayudado a que el artículo esté mejor organizado y sea más fácil de leer. Si este objetivo no se ha cumplido en su totalidad, la responsabilidad es del autor. También me ha proporcionado el ejemplo 6.6. Por todo ello expreso aquí mi sincero agradecimiento, que hago extensivo a los editores.
3. La «disculpa» para empezar a redactar estas notas ha sido la preparación de una conferencia para el XIX C.E.D.Y.A. / IX Congreso de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, celebrado en Leganés en septiembre de 2005. Una versión muy resumida se publicó en el Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, [20]. Agradezco a la organización del congreso el apoyo recibido y, en especial, la invitación de Armengol Gasull.
4. Finalmente agradezco a mis colegas Daniel Franco y Pedro Torres por animarme a escribir este trabajo.

## REFERENCIAS

- [1] R. BELLMAN Y K. L. COOKE, *Differential-Difference equations*, Academic Press, New York y London, 1963.
- [2] Y. CAO, Uniqueness of periodic solution for differential delay equations, *J. Differential Equations* **128** (1996), 46–57.
- [3] S. N. CHOW, J. K. HALE Y W. HUANG, From sine waves to square waves in delay equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **120** (1992), 223–229.
- [4] R. L. DEVANEY, *An introduction to chaotic dynamical systems* (segunda edición), Perseus Books, Reading, 1989.
- [5] O. DIEKMANN, S. A. VAN GILS, S. M. VERDUYN LUNEL Y H.-O. WALTHER, *Delay equations, functional-, complex-, and nonlinear analysis*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 1995.
- [6] W. S. C. GURNEY, S. P. BLYTHE Y R. M. NISBET, Nicholson's blowflies revisited, *Nature* **287** (1980), 17–21.
- [7] K. P. HADELER Y J. TOMIUK, Periodic solutions of difference differential equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **65** (1977), 87–95.
- [8] J. K. HALE, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Mathematical Surveys and Monographs 25, A.M.S., Providence, RI, 1988.
- [9] J. K. HALE, Effects of delay on dynamics, *Topological Methods in Differential Equations and Inclusions* (Proceedings of the NATO A.S.I., Montreal, Canadá, July 11–22, 1994), Kluwer Academic Publishers, 1995, pp. 191–238.
- [10] J. K. HALE, Some problems in FDE, *Fields Inst. Commun.* **29** (2001), 195–222.
- [11] J. K. HALE Y H. KOÇAK, *Dynamics and bifurcations*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [12] J. K. HALE Y S. M. VERDUYN LUNEL, *Introduction to functional differential equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 1993.
- [13] U. AN DER HEIDEN Y M. C. MACKEY, The dynamics of production and destruction: analytic insight into complex behavior, *J. Math. Biol.* **16** (1982), 75–101.
- [14] A. IVANOV Y A. N. SHARCOVSKY, Oscillations in singularly perturbed delay equations, *Dynamics Reported (New Series)* **1** (1992), 164–224.
- [15] T. KRISZTIN, Periodic orbits and the global attractor for delayed monotone negative feedback, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, Proc. 6'th Coll. Qualitative Theory of Diff. Equ. **15** (2000), 1–12.
- [16] Y. KUANG, *Delay differential equations with applications in population dynamics*, Academic Press, 1993.
- [17] B. LANY-WAYDA, *Wandering solutions of delay equations with sine-like feedback*, *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, Vol. 718, A.M.S., Providence, RI, 2001.
- [18] B. LANY-WAYDA Y H.-O. WALTHER, Chaotic motion generated by delayed negative feedback, Part I: A transversality criterion, *Differential Integral Equations* **8** (1995), 1407–1452.

- [19] E. LIZ, Four theorems and one conjecture on the global asymptotic stability of delay differential equations, *The First 60 Years of Nonlinear Analysis of Jean Mawhin* (M. Delgado et al., eds.), World Scientific, Singapore, 2004, pp. 117–129.
- [20] E. LIZ, Un puente entre las ecuaciones diferenciales con retardo y los sistemas dinámicos discretos, Actas del CEDYA 2005, *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. SĒMA* **34** (2006), 147–151.
- [21] E. LIZ, G. ROBLEDO Y S. TROFIMCHUK, La conjetura de Wright: entre la distribución de los números primos y el crecimiento de la población, *Cubo Mat. Educ.* **3** (2001), 89–107.
- [22] E. LIZ, V. TKACHENKO Y S. TROFIMCHUK, A global stability criterion for scalar functional differential equations, *SIAM J. Math. Anal.* **35** (2003), 596–622.
- [23] E. LIZ, V. TKACHENKO Y S. TROFIMCHUK, A global stability criterion for a family of delayed population models, *Quarterly Appl. Math.* **63** (2005), 56–70.
- [24] M. C. MACKEY Y L. GLASS, Oscillation and chaos in physiological control systems, *Science* **197** (1977), 287–289.
- [25] J. MALLET-PARET Y R. NUSSBAUM, Global continuation and asymptotic behaviour for periodic solutions of a differential-delay equation, *Annali Mat. Pura ed Appl.* **145** (1986), 33–128.
- [26] J. MALLET-PARET Y R. NUSSBAUM, A differential-delay equation arising in optics and physiology, *SIAM J. Math. Anal.* **20** (1989), 249–292.
- [27] A. N. SHARPOVSKY, Y. L. MAISTRENKO Y E. Y. ROMANENKO, *Difference equations and their applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [28] D. SINGER, Stable orbits and bifurcation of maps of the interval, *SIAM J. Appl. Math.* **35** (1978), 260–267.
- [29] H. L. SMITH, *Monotone Dynamical Systems. An introduction to the theory of competitive and cooperative systems*, A.M.S., Providence, RI, 1995.
- [30] H.-O. WALTHER, *The 2-dimensional attractor of  $x'(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1))$* , *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, Vol. 544, A.M.S., Providence, RI, 1995.
- [31] H.-O. WALTHER, Contracting return maps for monotone delayed feedback, *Discrete Contin. Dynam. Systems* **7** (2001), 259–274.
- [32] H.-O. WALTHER Y M. YEBDRI, Smoothness of the attractor of almost all solutions of a delay differential equation, *Dissertationes Math.* **368** (1997).
- [33] M. WAZEWSKA-CZYZEWSKA Y A. LASOTA, Matematyczne problemy dynamiki układu krwinek czerwonych, *Matematyka Stosowana* **6** (1976), 23–40 (en polaco).
- [34] E. M. WRIGHT, A nonlinear difference-differential equation, *J. Reine Angew. Math.* **194** (1955), 66–87.

EDUARDO LIZ, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II, E.T.S.I. TELECOMUNICACIÓN, CAMPUS MARCOSENDE, UNIVERSIDAD DE VIGO, 36280 VIGO

Correo electrónico: [eliz@dma.uvigo.es](mailto:eliz@dma.uvigo.es)

Página web: <http://www.dma.uvigo.es/~eliz>