

## Sobre ecuaciones diferenciales con retraso, dinámica de poblaciones y números primos

Eduardo Liz

¿Qué tienen en común los modelos matemáticos en dinámica de poblaciones y los números primos? En mi caso, encontré una respuesta en mis investigaciones sobre la estabilidad de ecuaciones diferenciales con retraso. Hoy, por curiosidad, busqué en Internet otras posibles conexiones y me llamó la atención que las cigarras de la especie *Magicicada* (literalmente, cigarras mágicas) pasan la mayor parte de su vida bajo tierra y emergen periódicamente para reproducirse durante seis semanas únicamente cada 13 o 17 años (imaginen las serenatas nocturnas producidas por miles de millones de estos seres esos días). El hecho de que estos números sean primos parece responder a una estrategia para evitar a los depredadores: si se reprodujesen cada 12 años, estarían a merced de los depredadores con ciclos de reproducción de 2, 3, 4 y 6 años. Una prueba más de que la Naturaleza sabe Matemáticas. . . Pero esto es otra historia y debe ser contada en otra ocasión. Si se han quedado con curiosidad, pueden consultar, por ejemplo, la referencia [6] o la página web que le dedica a estos fascinantes animalitos<sup>1</sup> la Universidad de Michigan<sup>2</sup>. En cualquier caso, ya me sorprende un poco menos que la ecuación diferencial con retraso que modela el crecimiento logístico haya aparecido hace más de 50 años en un intento de encontrar una demostración sencilla del *teorema del número primo*. Es esta una de las partes más atractivas de estas notas, en las que también aprovecharemos para dar a conocer algunos aspectos de las

<sup>1</sup>Parece ser que Bob Dylan dedicó una canción en 1970 a esta rara aparición periódica de las cigarras.

<sup>2</sup><http://www.ummz.lsa.umich.edu/magicicada/Periodical/Index.html>

ecuaciones con retraso y pasaremos por el mundo de los sistemas dinámicos discretos. Por el medio aparecen números mágicos y personajes inquietantes que ayudarán a hacer más amena la lectura.

## Introducción

Una versión preliminar de estas notas fue preparada para impartir la conferencia del mismo título en la Jornada “Tres aspectos de la investigación matemática en Galicia”, organizada por el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela el 4 de Abril de 2001. Más tarde impartí la misma charla en las universidades de Murcia, La Rioja, Zaragoza y UNED (Madrid). En todas ellas tuvo muy buena acogida, lo que agradezco sinceramente. Igualmente agradezco la invitación a preparar una versión del trabajo para la revista *Materials Matemàtics*. Muchos de los contenidos fueron adaptados del trabajo [16], preparado en Santiago de Chile en colaboración con Gonzalo Robledo (que ahora es investigador post-doctoral en el Instituto Tecnológico de Israel) y Sergei Trofimchuk (catedrático de la Universidad de Talca, Chile).

He estructurado el trabajo en las siguientes secciones:

1. Las ecuaciones diferenciales con retraso se duchan con nosotros.
2. Ecuaciones con retraso en modelos de población: la ecuación logística.
3. La atracción global y el teorema del número primo.
4. La conjetura de Wright.
5. Dinámica unidimensional: la derivada de Schwarz.
6. Más sobre el número  $3/2$ .

### 1. Las ecuaciones diferenciales con retraso se duchan con nosotros.

Probablemente pocos de ustedes están familiarizados con las ecuaciones diferenciales con retraso. Sin embargo ellas tienen tanta confianza con ustedes que están presentes en su ducha diaria. La teoría de ecuaciones diferenciales

con retraso se ocupa de modelos donde la variación de la variable de estado  $x$  con el tiempo depende en cada instante  $t$  no sólo de  $x(t)$  sino también de los valores de  $x$  en instantes anteriores. En estas notas las ecuaciones que aparecen son principalmente de la forma  $x'(t) = f(x(t), x(t-r))$ , donde  $f$  es una función dada y  $r > 0$ . El lector interesado en ecuaciones más generales y sus aplicaciones puede consultar algunas de las monografías [3, 10, 14, 15].

Aunque la teoría general es bastante compleja, el caso más sencillo posible (una ecuación lineal escalar de coeficientes constantes dependiente de un único parámetro de retardo) sirve para motivar la importancia de las ecuaciones con retraso. Para ello he tomado prestado un ejemplo propuesto por Kolmanovskii y Myshkis en [14] (merece la pena consultar el libro para ver la ilustración que acompaña al ejemplo, no me he atrevido a robarla también). Consideremos una persona que empieza a ducharse y quiere que el agua alcance una temperatura óptima  $T_d$  mediante el giro de un grifo. Se supone que el cambio de temperatura  $\Delta T$  es proporcional a la variación del ángulo de rotación  $\Delta\alpha$  con coeficiente  $k$ . Denotemos por  $T(t)$  la temperatura del agua en el mezclador y  $r$  el tiempo necesario para que el agua salga de la ducha. Se puede suponer que la variación en la rotación del grifo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del agua que sale de la ducha y la que desea la persona ( $T_d$ ) con constante  $l$ . Esta constante depende de la longitud del tubo y del temperamento (o del pulso) de la persona. Esto conduce a una ecuación con retraso para la temperatura:

$$T'(t) = -k\alpha'(t) = -kl(T(t-r) - T_d) \quad (1)$$

El cambio de variable  $x(t) = T(t) - T_d$  convierte la ecuación (1) en

$$x'(t) = -ax(t-r), \quad (2)$$

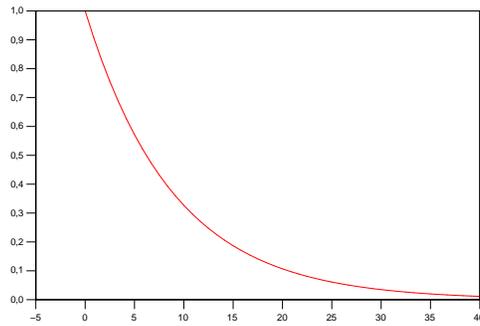
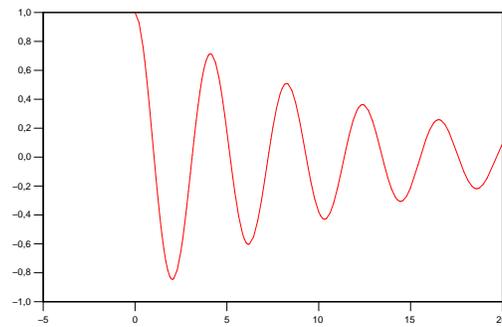
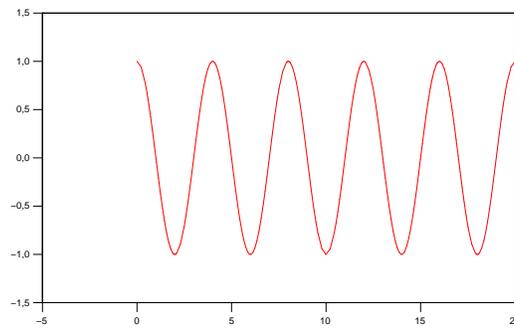
donde  $a = kl > 0$ . Observemos que con este cambio de variable la aproximación a  $T_d$  se convierte en una aproximación a cero. La ecuación (2) es una ecuación diferencial lineal con retraso y, a diferencia de lo que ocurre con la ecuación diferencial lineal ordinaria  $x'(t) = -ax(t)$ , el comportamiento de las soluciones varía con los parámetros  $a$  y  $r$ . Obsérvese que si  $r = 0$  las soluciones de la ecuación  $x'(t) = -ax(t)$  son de la forma  $x(t) = x(0)e^{-at}$  y por tanto convergen exponencialmente a cero. Volviendo a nuestro modelo, esto quiere decir que si el agua sale fría al principio entonces conseguimos la temperatura deseada de forma progresiva, calentándola cada vez más. Probablemente eso no es lo que observa usted a la hora de la ducha; al menos yo

recibo agua más caliente de lo deseable antes de conseguir una temperatura aceptable. Como consecuencia, el modelo con  $r = 0$  no es muy fiable. En el caso de retardo positivo, la ecuación (2) no es tan fácilmente integrable y el comportamiento de las soluciones viene dado por las raíces de la ecuación característica. Al igual que en el caso ordinario, buscamos soluciones de la forma  $e^{\lambda t}$  y sustituimos directamente en la ecuación para obtener

$$\lambda e^{\lambda t} = -a e^{\lambda(t-r)} \iff \lambda + a e^{-\lambda r} = 0.$$

Las raíces de esta ecuación trascendente proporcionan los valores característicos, que determinan el comportamiento de las soluciones. En particular, todos los valores característicos tienen parte real negativa si y sólo si  $ar < \pi/2$  (ver, por ejemplo, [10]). Expondremos brevemente los tres comportamientos que se observan al aumentar el valor de  $ar$ .

- Si  $ar < 1/e$ , las soluciones convergen exponencialmente a cero, como sucede en el caso ordinario. Esto indica que los retrasos pequeños no influyen en la dinámica (una frase que forma parte del folclore de las ecuaciones con retraso es “*small delays do not matter*”, es decir, “los retrasos pequeños no importan”). Este caso se corresponde con un tubo muy pequeño y una persona tranquila, con lo cual la temperatura se va alcanzando de forma progresiva. Véase la Figura 1, donde se han tomado los valores  $r = 1$ ,  $a = 0,1$ .
- Si  $1/e < ar < \pi/2$  las soluciones convergen a cero pero oscilando. Este comportamiento es característico de las ecuaciones con retardo, pues es imposible en una ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden. Se corresponde con un tubo un poco más largo y/o una persona con temperamento más fuerte. Se consigue la temperatura deseada pero pasando por etapas de frío y calor. Seguro que este comportamiento les resulta más familiar. En la Figura 2 se puede observar una de estas soluciones para  $r = 1$ ,  $a = 1,4$ .
- Si  $ar \geq \pi/2$  aparecen soluciones periódicas e incluso soluciones no acotadas. Los altos valores de  $a$  y  $r$  hacen que el agua pase sucesivamente de fría a caliente sin estabilizarse en torno al valor deseado. En la Figura 3 se muestra una solución periódica, obtenida tomando  $r = 1$ ,  $a = \pi/2$ . La existencia de soluciones periódicas en una ecuación diferencial lineal de primer orden es un fenómeno que diferencia las ecuaciones con retardo de las ecuaciones ordinarias clásicas.

Figura 1: Solución de la ecuación  $x'(t) = -0,1x(t - 1)$ Figura 2: Solución de la ecuación  $x'(t) = -1,4x(t - 1)$ Figura 3: Solución de la ecuación  $x'(t) = -(\pi/2)x(t - 1)$

Desafortunadamente, los modernos sistemas de programación de la temperatura amenazan seriamente la validez de este ejemplo en un futuro, así que en la siguiente sección nos ocupamos de un modelo que tiene más posibilidades de persistir.

## 2. Ecuaciones con retraso en modelos de población: La ecuación logística.

Una de las motivaciones más importantes para el estudio de las ecuaciones diferenciales con retraso viene de la biología matemática, y en particular de la dinámica de poblaciones. En esta sección repasamos algunos modelos de población para una especie, con especial atención a la ecuación logística.

Los modelos más simples son los modelos independientes de la densidad, es decir, aquellos en los que se supone que las tasas de natalidad y mortalidad por individuo no dependen del tamaño de la población. Malthus en 1798 propuso un modelo de este tipo en el que las tasas de natalidad y mortalidad en cada instante son proporcionales al número de individuos de la población en ese instante. Si denotamos por  $x(t)$  el número de individuos de la población en el instante  $t$  (se permite que  $x(t)$  tome cualquier valor real positivo, aunque en la interpretación real debe tomar sólo valores enteros), entonces  $x'(t)$  representa la tasa de variación del tamaño de la población y viene dada por la ecuación

$$x'(t) = ax(t) - bx(t), \quad (3)$$

donde  $a$  y  $b$  son respectivamente las tasas de natalidad y mortalidad *per capita*. El parámetro  $p = a - b$  se suele llamar *tasa intrínseca de crecimiento* y determina completamente las soluciones de la ecuación (3), que solamente tienen tres comportamientos posibles: crecen exponencialmente si  $p > 0$ , decrecen exponencialmente hacia cero si  $p < 0$  y son constantes si  $p = 0$  (esto resulta evidente de la expresión de las soluciones  $x(t) = x_0 e^{pt}$ , donde  $x_0$  es la población inicial).

El crecimiento exponencial se ajusta bastante a la realidad durante un cierto período de tiempo (se conocen datos reales de la evolución de la población humana que se corresponden con este comportamiento durante unos años [11]). Sin embargo, es natural pensar que a largo plazo no es un modelo realista, debido principalmente al agotamiento de los recursos. Además,

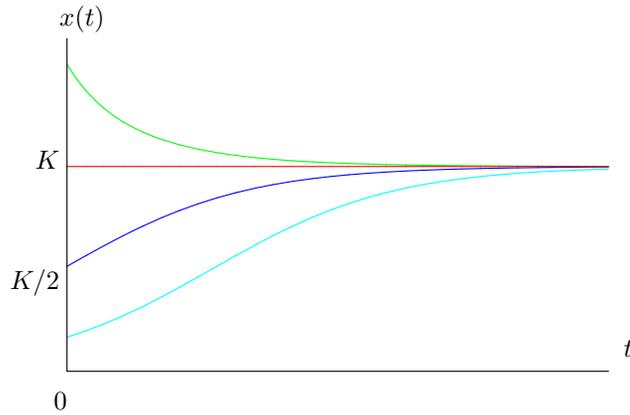


Figura 4: Soluciones de la ecuación de Verhulst

el modelo malthusiano tampoco explicaría una situación que se observa con cierta frecuencia en la naturaleza: la estabilización de la población hacia un valor de equilibrio. Podemos concluir que un modelo realista a largo plazo debe tener en cuenta que las tasas de natalidad y mortalidad dependen del tamaño de la población, debido a que cuando ésta crece demasiado debe existir un proceso de autolimitación (llamado comúnmente *competición intraespecífica*).

Verhulst<sup>3</sup> propuso en 1836 su célebre *ecuación logística*, en la cual la tasa de mortalidad se supone constante mientras que la tasa de natalidad depende linealmente del tamaño de la población, de tal modo que la población no puede crecer indefinidamente y existe un valor  $K$  de la densidad de población en el cual la tasa de crecimiento *per capita* es cero. Esta constante  $K$  actúa como nivel de saturación y se suele determinar en función de la cantidad de recursos disponibles. Estas consideraciones conducen a la ecuación de Verhulst

$$x'(t) = px(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right), \quad x > 0. \quad (4)$$

La ecuación (4) es fácilmente integrable y se puede comprobar que el equilibrio positivo  $x = K$  es globalmente asintóticamente estable para  $x > 0$ . El otro equilibrio ( $x = 0$ ) es inestable y las soluciones tienen un comportamiento como el que indica la Figura 4.

<sup>3</sup>Si el lector desea saber más sobre la vida y contribuciones de Verhulst, es recomendable la lectura del trabajo de Jean Mawhin [21].

En particular, las soluciones con valor inicial  $x_0 < K/2$  presentan un punto de inflexión que se observa habitualmente en las tablas reales (ver [11, 24]).

Sin embargo existen ejemplos, incluso en poblaciones humanas, que muestran que la población a veces sigue creciendo por encima del nivel  $K$  en lugar de aproximarse indefinidamente a él por debajo. En experimentos reales se observa también un comportamiento periódico en la evolución del tamaño de la población de ciertas especies de insectos que no puede explicar el modelo logístico de Verhulst. Una de las características de la ecuación (4) que podría explicar estas deficiencias reside en el hecho de que considera que la tasa de natalidad actúa instantáneamente, mientras que en general existe un cierto retraso debido a la influencia de factores como el período de madurez y el tiempo de gestación. Hutchinson propuso en 1948 [13] la ecuación logística con retardo

$$x'(t) = px(t) \left( 1 - \frac{x(t-r)}{K} \right), \quad (5)$$

donde  $r$  representa la edad de máxima capacidad reproductiva de un individuo de la población. En este caso la tasa de crecimiento *per capita* en el instante  $t$  es una función lineal de la población en el instante  $t - r$ . Para la comparación con otros modelos, nos resultará útil escribirla en la forma

$$x'(t)/x(t) = f(x(t-r)), \quad (6)$$

donde en este caso  $f(x) = p(1 - x/K)$  (ver Figura 5 (a)).

Un célebre ejemplo del comportamiento de una población según la ecuación (5) se puede encontrar en los experimentos realizados por el entomólogo australiano A.J. Nicholson [25] con poblaciones de la mosca de la oveja (*Lucilia cuprina*). Los datos obtenidos por Nicholson permiten observar un comportamiento oscilatorio de las soluciones y May [22] encontró los valores de los parámetros de la ecuación de Hutchinson que mejor se adaptaban a estos datos (que corresponden aproximadamente a  $pr = 2,1$ ).

Mencionamos a continuación dos generalizaciones del modelo logístico. En 1963, el ecólogo F.E. Smith [30] trató de utilizar la ecuación (5) con  $r = 0$  para interpretar sus experimentos sobre el crecimiento de la población de la mosca *Daphnia magna*. Sin embargo, observó que en este caso la tasa de crecimiento *per capita* no es una función lineal de la población como sucedía para la *Lucilia cuprina*. Basándose en sus datos experimentales, sugirió que

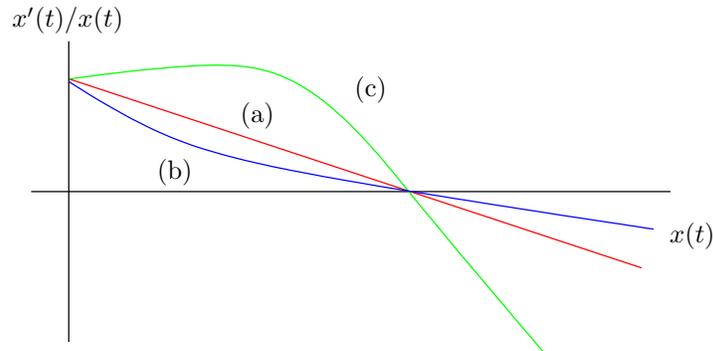


Figura 5: Tasas de crecimiento *per capita* para los modelos (a) logístico, (b) *food-limited*, (c) con efecto Allee.

esta tasa tiene una dependencia de la población regulada por la función racional (ver Fig. 5 (b))

$$f(x) = \frac{K - x}{K + cpx}, \quad K, c, p > 0.$$

Esto da lugar a la siguiente generalización de la ecuación de Hutchinson:

$$x'(t) = px(t) \frac{K - x(t-r)}{K + cpx(t-r)}, \quad (7)$$

que se conoce con el nombre de “food-limited model” (ver [9]). Nótese que para  $c = 0$  se obtiene precisamente la ecuación (5).

Para  $r = 0$  (es decir, sin factores de retardo), la ecuación (7) fue considerada por varios autores en sus investigaciones de la influencia de la polución en ciertas poblaciones (véase, por ejemplo, [26]).

En 1933, los estudios del biólogo W.C. Allee [1] mostraron la fuerte influencia que tienen ciertos “efectos sociales” en el desarrollo interno de la población de algunas especies con conducta cooperativa (abejas, hormigas, peces, etc.). Para estas poblaciones, la tasa de crecimiento *per capita* aumenta hasta el instante en que la población alcanza un valor crítico. Al pasar este valor, empieza a disminuir debido a causas como la competencia por los recursos. Esto se traduce en que la función  $f$  no es monótona como en los casos anteriores sino que tiene la forma indicada en la Figura 5 (c). La modificación más sencilla de la ecuación de Hutchinson que permite considerar este comportamiento (conocido como “efecto Allee”) viene dada por la

siguiente ecuación [8, 15]:

$$x'(t) = x(t) \left[ 1 - \frac{x(t-r)}{K} \right] (p + qx(t-r)), \quad x > 0, p > 0, q \geq 0. \quad (8)$$

De nuevo la ecuación (5) es un caso particular de esta (se obtiene para  $p = 1$ ,  $q = 0$ ). El carácter no lineal de la función  $f$  que relaciona la tasa de crecimiento *per capita* con la densidad de población en las generalizaciones (7) y (8) de la ecuación de Hutchinson hace que muchas técnicas empleadas para la ecuación logística no sirvan. Sin embargo, veremos que tienen características comunes que permiten estudiarlas conjuntamente y encontrar resultados similares para todas ellas.

Mediante un cambio de variable adecuado, todos estos modelos se pueden escribir en la forma general

$$x'(t) = f(x(t-1)). \quad (9)$$

Por ejemplo, en el caso de la ecuación logística, el cambio de variable  $z(t) = -\ln(x(t)/K)$  conduce a la ecuación

$$z'(t) = pr(e^{-z(t-1)} - 1), \quad (10)$$

que es de la forma (9) con  $f(x) = pr(e^{-x} - 1)$ .

### 3. La atracción global y el teorema del número primo

Uno de los aspectos más importantes en el análisis de la dinámica de una población modelada por las ecuaciones (5), (7), (8) es el estudio de la estabilidad asintótica global del equilibrio positivo definido por el nivel de saturación  $K$ , es decir, la búsqueda de condiciones bajo las cuales todas las posibles evoluciones de la población tienden a estabilizarse en torno a  $K$  cuando transcurre el tiempo.

Por ejemplo, para la ecuación de Hutchinson, resolver el problema de la estabilidad asintótica global equivale a encontrar el rango de valores entre los que deben estar los parámetros  $p$  y  $r$  para que el límite de  $x(t)$  cuando  $t$  tiende a infinito sea  $K$  para cualquier solución positiva  $x$  de la ecuación (5).

El cambio de variable  $y(t) = -1 + x(rt)/K$  transforma la ecuación de Hutchinson en la ecuación

$$y'(t) = -ay(t-1)(1+y(t)) \quad (11)$$

con  $a = pr$ . Nos referiremos a (11) como *ecuación de Wright*. Respecto a esta ecuación, el problema anterior se traduce en hallar los valores de  $a$  para los cuales

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0 \quad (12)$$

para las soluciones  $y(t)$  de (11) tales que  $y(t) + 1 = x(rt)/K > 0$ . En este caso diremos que el equilibrio  $y = 0$  es globalmente asintóticamente estable para (11).

Aunque este problema tiene especial interés en dinámica de poblaciones y este es el marco más conocido, resulta curioso que surgió de un problema clásico de la teoría de números: la búsqueda de una demostración sencilla del “teorema del número primo”.

Consideremos la función  $\pi$  que asocia a cada real positivo  $x$  la cantidad de números primos menores o iguales que  $x$  (por ejemplo,  $\pi(10) = 4$ ,  $\pi(100) = 25$ ,  $\pi(1000) = 168$ ). Como es bien sabido, hay infinitos números primos y por tanto  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \pi(x) = \infty$ .

El teorema del número primo establece la siguiente fórmula asintótica:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x) \ln(x)}{x} = 1. \quad (13)$$

Esto quiere decir que el orden de crecimiento de la función  $\pi(x)$  es similar al de la función  $x/\ln(x)$ . En la Figura 6 se puede ver una comparación entre estas dos funciones para  $n \leq 200$ .

El teorema fue conjeturado por Gauss en 1793. En 1852 Chebyshev probó la siguiente relación:

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x) \ln(x)}{x} \leq 1 \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x) \ln(x)}{x},$$

es decir si existe el límite, éste debe valer 1. Sin embargo, no fue capaz de probar la existencia del límite. Las primeras demostraciones del teorema tuvieron que esperar hasta 1896, con trabajos independientes de J. Hadamard y C.J. De la Vallé Poussin. El lector interesado en más detalles y referencias más precisas puede consultar el capítulo VII de la monografía [27]. Como estas

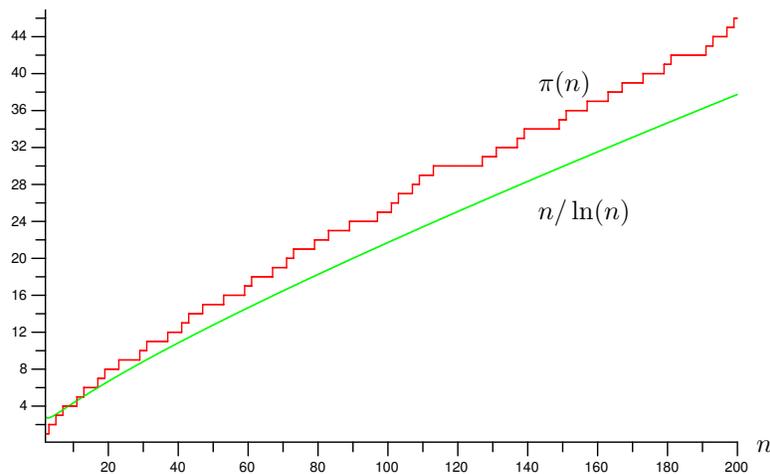


Figura 6: Comparación de las funciones  $\pi(n)$  y  $n/\ln(n)$ .

demostraciones resultaban muy complicadas, otros matemáticos importantes continuaron buscando pruebas más simples y transparentes de la relación (13). Son célebres las demostraciones obtenidas en 1949 por P. Erdős<sup>4</sup> [5] y A. Selberg [28]. Parece ser que en este caso ambos conocían el trabajo del otro pero no llegaron a ponerse de acuerdo para publicarlo conjuntamente<sup>5</sup>.

En este contexto aparece el personaje más aristocrático de nuestra historia: Lord Cherwell<sup>6</sup>, quien pasó a la historia por razones bien distintas. Fue el científico inglés más influyente durante la segunda guerra mundial, en la que fue asesor del primer ministro Winston Churchill. Se cuenta que recomendó el uso de bombas de ántrax contra los alemanes a principios del año 1944. Aunque parece ser que el gobierno británico encargó 500.000 bombas

<sup>4</sup>Como el lector probablemente ya sepa, Paul Erdős (1913-1996) fue uno de los matemáticos más importantes del Siglo XX. Publicó tantos trabajos y con tantos colaboradores, que se ha elegido como referencia para “medir” la proximidad científica entre los miembros de la comunidad matemática. Ver por ejemplo, [www.oakland.edu/enp/](http://www.oakland.edu/enp/)

<sup>5</sup>Se puede ver este comentario y otros aspectos interesantes de la historia del teorema en la página web <http://www.mathworld.wolfram.com/PrimeNumberTheorem.html>

<sup>6</sup>También conocido como “*the Prof*,” Frederick Lindemann (1886-1957) fundó el Laboratorio Clarendon en Oxford. El propio Churchill le concedió el título de Lord Cherwell por sus servicios durante la guerra (Cherwell es el nombre de uno de los ríos de Oxford). Churchill lo describió como “el lóbulo científico de su cerebro”.

a los Estados Unidos, afortunadamente estas no llegaron a usarse por el fin de las hostilidades en 1945<sup>7</sup>.

Quizá antes de involucrarse en estos temas espinosos, Lord Cherwell, se sumó en el año 1942 a la tarea de encontrar una nueva demostración del teorema del número primo. Sus razonamientos le condujeron a la ecuación diferencial funcional

$$2xy''(x)/y'(x) + y'(\sqrt{x}) = 0. \quad (14)$$

Sin embargo, esta ecuación dista mucho de ser elemental y Lord Cherwell escribió una carta a su colega el profesor Wright<sup>8</sup> para pedir su ayuda. El problema atrajo el interés de Wright, quien dedicó mucho tiempo a investigar las propiedades de la ecuación (14), llegando incluso a olvidar (según él mismo confesó en un artículo del año 1961 [34]) cuáles eran los razonamientos que ligaban esta ecuación con el teorema del número primo. Desafortunadamente, como anunció también en su artículo [34], perdió la carta de Lord Cherwell y éste nunca llegó a publicar sus notas. Casi 20 años más tarde, Hoffman de Visme [12] encontró de nuevo, y de manera independiente, la ecuación (14) con la misma intención de Lord Cherwell de obtener una prueba más sencilla de la relación (13). (En el artículo de H. de Visme, la función  $y(x)$  que aparece en la ecuación (14) representa la curva diferenciable que mejor aproxima la variación de  $\pi(x)$  con  $x$ ).

Aunque los argumentos usados por estos autores no resultan demasiado transparentes, si confiamos en la intuición de Mr. de Visme y Lord Cherwell, es posible llegar a obtener una prueba del teorema del número primo mediante el estudio de la ecuación (14). Wright [34] propone los cambios de variable  $y'(x) \ln(x) = 1 + w(v)$  y  $\ln(x) = 2^v$ ; de este modo la ecuación (14) se transforma en

$$w'(v) = -\ln(2)w(v-1)(1+w(v)), \quad (15)$$

que es un caso particular de (11) (parámetro  $a = \ln(2)$ ). Supongamos ahora que

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} w(v) = 0, \quad (16)$$

<sup>7</sup>En la edición digital de esta mañana -23 de Octubre de 2006- del *World Net Daily* aparece un artículo titulado *The secret history of anthrax*, que menciona el papel de nuestro personaje.

<sup>8</sup>Edward Maitland Wright (1906-2005) es más conocido en la historia de las Matemáticas por haber escrito el libro *An introduction to the theory of numbers* con G. H. Hardy, publicado por primera vez en 1938.

para todas las soluciones de la ecuación (15). Obviamente, en este caso,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) \ln(x) = 1$  y por tanto  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0$ . De estas dos relaciones, y haciendo uso de la regla de L'Hôpital, se obtiene finalmente que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x) \ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y'(x) \ln(x) + y(x)/x) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 1.$$

En consecuencia, la relación (16) probaría el teorema del número primo. Esta consideración llevó a Wright a estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación (11) para los distintos valores del parámetro  $a > 0$ . Finalmente él logró probar que la relación (16) no sólo es cierta para  $a = \ln(2)$  sino para todo  $a \in (0, 3/2]$  (ver [33, Teorema 3]). Nos referiremos a este resultado como “Teorema 3/2 de Wright” (jojo a este número, que es más importante de lo que parece!). Cabe destacar que la demostración del teorema de Wright para  $a < 1$  es bastante simple, lo que, dado que  $\ln(2) < 1$ , proporcionaría una de las demostraciones más cortas del teorema del número primo si los planteamientos de Cherwell y de Visme fuesen aceptados.

Es interesante notar que hay mucho más que el teorema 3/2 en el artículo de Wright. De hecho otros resultados y técnicas allí incluidos fueron clave en el desarrollo de partes importantes de la teoría de ecuaciones diferenciales con retraso. Por tanto esta teoría le debe algo a Lord Cherwell y sus inquietudes respecto a los números primos. Como comentario final, reseñamos que otros autores estudiaron más recientemente ecuaciones funcionales en teoría de números. Ver, por ejemplo, las referencias [32, 36].

## 4. La conjetura de Wright

Recordemos que en la primera sección hablamos del comportamiento de las soluciones de la ecuación lineal con retraso (2) según los valores de los parámetros  $a$  y  $r$ . Esta ecuación vuelve a interesarnos ahora porque es la ecuación linealizada de (11) en torno al equilibrio  $y = 0$ . En particular, esto quiere decir (véase, por ejemplo, [3]), que las propiedades de estabilidad local de la solución cero para (11) son las mismas que las de la ecuación lineal

$$y'(t) = -ay(t-1). \quad (17)$$

Ahora bien, como se indicó en la primera sección, la ecuación (17) es asintóticamente estable si y sólo si  $a < \pi/2$ . Si  $a \geq \pi/2$  la solución trivial de (11) no

es estable y existen soluciones que no convergen a cero. En otras palabras,  $y = 0$  no es globalmente asintóticamente estable.

La proximidad entre  $3/2 = 1,5$  y  $\pi/2 = 1,57\dots$  sugiere la siguiente conjetura:

**Conjetura 4.1 (Wright, 1955)** *Si  $a \in (0, \pi/2)$  entonces el equilibrio  $y = 0$  es globalmente asintóticamente estable para la ecuación (11).*

Dicho de otro modo, esta conjetura establece que los valores de  $a$  para los cuales todas las soluciones de la ecuación lineal (17) convergen a cero son los mismos que los que proporcionan la misma propiedad para la ecuación no lineal (11). Esta conjetura se engloba dentro de una familia de problemas similares, que se conocen popularmente bajo la “fórmula”

$$\text{LAS} \implies \text{GAS} \quad (18)$$

(la estabilidad asintótica local del equilibrio implica su estabilidad asintótica global), y que también ha sido considerada en otros ámbitos distintos de las ecuaciones diferenciales con retraso.

En este momento la Conjetura 4.1 sigue siendo un problema abierto. En apoyo de la Conjetura 4.1, el propio Wright indicó que es posible “*a costa de una considerable elaboración*” demostrar que (12) es cierto para  $r \leq 37/24 = 1,54\dots$  y probablemente para  $r \leq 1,567\dots$ . Sin embargo, en estos casos no llegó a escribir la prueba. Muy recientemente, Tibor Krisztin y otros investigadores de la Universidad de Szeged han anunciado estar muy cerca de la prueba de la conjetura combinando técnicas analíticas con rigurosos métodos numéricos. En el resumen [2] se anuncia la prueba para  $r \leq 1,568$ . Es esperable que la demostración final no tarde mucho en aparecer. La comunidad matemática interesada en las ecuaciones con retardo lo celebrará, aunque no se trate de uno de los “*Millenium Prize Problems.*”

Es interesante indicar que J. Hale calificó el resultado para  $r \leq 3/2$  como “*a very difficult theorem of Wright.*” Sin embargo, no faltan optimistas como K. Gopalsamy, que incluye el estudio de la conjetura en la lista de problemas del capítulo 1 de su libro sin mayor aviso sobre su dificultad (ver [7, Ejercicio 26, p. 110]).



E. M. Wright

Uno de los problemas que sugiere la conjetura de Wright es analizar qué propiedades de la ecuación (11) son las responsables de que se verifique (18).

Como hemos visto al final de la Sección 2, la ecuación de Wright se puede escribir, mediante un cambio de variable, en la siguiente forma:

$$x'(t) = f(x(t-1)), \quad (19)$$

donde  $f(x) = a(e^{-x} - 1)$ . La estabilidad global del equilibrio  $y = 0$  en (11) es equivalente a la estabilidad global de  $x = 0$  en esta nueva formulación. Nótese que, en este caso, cero es el único equilibrio de la ecuación.

La función  $f(x) = a(e^{-x} - 1)$  verifica, entre otras, las siguientes propiedades:

- (i)  $f(0) = 0$ ;
- (ii)  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  y  $f'(x) < 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,
- (iii)  $f$  está acotada inferiormente.

Las condiciones (i) y (ii) implican que  $xf(x) < 0$  para todo  $x \neq 0$ . Esta propiedad se conoce habitualmente con el nombre de condición de *feedback negativo* y significa que la tasa de crecimiento per capita es positiva si la densidad de población está por debajo del valor crítico  $K$  y negativa en caso contrario. Las condiciones (ii) y (iii) expresan que la tasa de crecimiento per capita disminuye cuando aumenta la densidad de población, pero sólo puede disminuir hasta un determinado nivel.

El único equilibrio de la ecuación (19) con  $f$  en las condiciones (i)-(iii) es  $x(t) \equiv 0$ . Su ecuación linealizada es

$$x'(t) = f'(0)x(t-1),$$

que, como hemos visto anteriormente, es asintóticamente estable si  $f$  verifica la condición  $-f'(0) < \pi/2$ . El teorema de Wright se puede reescribir en la forma

**Teorema 4.2 (Wright, 1955)** *Consideremos la ecuación (19), con  $f(x) = a(e^{-x} - 1)$ . Si  $|f'(0)| < 3/2$  entonces el equilibrio  $x = 0$  es globalmente asintóticamente estable.*

Para demostrar este teorema, Wright empleó de manera sustancial varias propiedades específicas de la función exponencial, como la monotonía. Sin embargo, las propiedades (i)-(iii) no son suficientes para probar el teorema 3/2. En efecto, H.-O. Walther [31] construyó ejemplos de funciones  $f$  con las propiedades (i)-(iii) y valores arbitrariamente pequeños de  $|f'(0)|$  para las cuales la ecuación (19) tiene una solución periódica no trivial y por tanto la solución constante  $x = 0$  no puede atraer a todas las trayectorias de la ecuación.

Esto significa que para lograr probar una forma más general del Teorema 3/2 de Wright para la ecuación (19) es necesario tener en cuenta otras propiedades de la función  $f(x) = a(e^{-x} - 1)$ . De hecho veremos que es suficiente agregar una hipótesis más, e incluso la condición (ii) se puede sustituir por una más general que permite englobar los modelos de población con tasa de crecimiento cuadrática considerados en la Sección 2. La idea la tomamos de lo que sucede en sistemas dinámicos discretos de dimensión uno.

## 5. Dinámica unidimensional: La derivada de Schwarz

Empezamos esta sección introduciendo la derivada de Schwarz, que se define para una función real  $f$  de clase  $\mathcal{C}^3$  como

$$(Sf)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

en todos los puntos en que  $f'(x) \neq 0$ .

Fue introducida por H. Schwarz en 1869 en un trabajo sobre aplicaciones conformes. En variable compleja se usa como un criterio para establecer cuándo una función es racional de la forma  $T(z) = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$  (también llamada *transformación de Möbius*), ya que son precisamente las funciones con derivada de Schwarz idénticamente cero. Su importancia en la teoría de Sistemas Dinámicos fue puesta de manifiesto por David Singer en 1978 [29].

Recordemos que un sistema dinámico unidimensional está generado por una aplicación continua  $f : I \rightarrow I$ , donde  $I$  es un intervalo real. Dado  $y_0 \in I$ , se define  $y_1 = f(y_0)$  y, en general,

$$y_{n+1} = f(y_n), \quad n \geq 1. \tag{20}$$

Esto permite construir por recurrencia una sucesión de números reales  $\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ , llamada órbita de  $y_0$ .

Si  $c$  es un punto fijo de  $f$  ( $f(c) = c$ ), la órbita de  $c$  es la sucesión constante  $\{c, c, c, \dots\}$ , y diremos que es globalmente atractora si la órbita de cada punto  $y_0 \in I$  converge a  $c$ , es decir, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y_0) = c, \quad \forall y_0 \in I. \quad (21)$$

Uno de los sistemas dinámicos unidimensionales más célebres es el generado por la aplicación logística  $F_m(x) = mx(1-x)$ . El comportamiento de las órbitas de este sistema puede ser caótico para ciertos valores del parámetro  $m$  (ver [4]). Los resultados de Singer permiten probar que  $F_m$  tiene a lo sumo una órbita atractora. En este resultado es esencial que la derivada de Schwarz de  $F_m$  es negativa en todos los puntos en los que  $F'_m(x) \neq 0$ .

La derivada de Schwarz también juega un papel importante en la relación entre las propiedades de atracción local y global de los puntos fijos de la ecuación (20). La ecuación lineal correspondiente a (20) en las proximidades de un punto fijo  $c$  tiene la forma

$$x_{n+1} \simeq c + f'(c)(x_n - c), \quad (22)$$

de donde se deduce inmediatamente que  $x_n - c \simeq (f'(c))^n(x_0 - c)$ ,  $n \geq 1$ . Obviamente,  $\lim x_n = c$  si y sólo si  $|f'(c)| < 1$ .

También en esta situación más sencilla es posible encontrar ejemplos de funciones  $f$  que verifican (i)-(iii) y para las cuales la condición  $|f'(c)| < 1$  no garantiza que todas las soluciones de la ecuación no lineal (20) convergen hacia  $c$ .

Ahora bien, esto no ocurre para las aplicaciones estrictamente decrecientes o unimodales con derivada de Schwarz negativa, según se enuncia en el siguiente resultado

**Teorema 5.1** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ ,  $f \in \mathcal{C}^3$ , una función estrictamente decreciente o con un único punto crítico  $x^*$  (máximo local). Si  $f$  tiene un único punto fijo  $c$  y  $(Sf)(x) < 0$  para todo  $x \neq x^*$  entonces la condición de estabilidad asintótica local  $0 < |f'(c)| < 1$  implica la estabilidad global de  $c$ , es decir, todas las órbitas de (20) convergen a  $c$ .*

Aunque el resultado parece ser bien conocido por los especialistas en dinámica unidimensional, resulta difícil encontrar una demostración. Por eso

me permito sugerir la nuestra (ver la Proposición 3.3 en la página 601 de [19]) para el lector interesado. Nótese que el Teorema 5.1 establece un resultado del tipo (18).

Motivados por el Teorema 5.1, y haciendo uso de él, hemos probado el siguiente resultado:

**Teorema 5.2** ([17]) *Supongamos que  $f$  verifica las siguientes condiciones:*

- (a)  $xf(x) < 0, \forall x \neq 0$ ;
- (b)  $f$  es estrictamente decreciente o tiene un único punto crítico  $x^*$  (máximo local);
- (c)  $f$  está acotada inferiormente;
- (d)  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^3$  y  $(Sf)(x) < 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Si  $|f'(0)| \leq 3/2$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  para todas las soluciones  $x(t)$  de la ecuación (19).

Es claro que el teorema de Wright se puede obtener como caso particular del Teorema 5.2, ya que para  $f(x) = a(e^{-x} - 1)$  se tiene que  $(Sf)(x) = -1/2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Este resultado nos anima a formular la siguiente generalización de la conjetura de Wright:

**Conjetura 5.3** *Supongamos que  $f$  verifica las condiciones (a)-(d) del Teorema 5.2. Entonces la estabilidad asintótica local del equilibrio  $x = 0$  en la ecuación (19) implica su estabilidad asintótica global.*

Cabe destacar que el resultado del Teorema 5.2 permite considerar funciones unimodales, así como funciones estrictamente decrecientes más generales que la exponencial. En particular, podemos establecer resultados de estabilidad asintótica global para las generalizaciones (7) y (8) de la ecuación de Hutchinson.

Por ejemplo, para la ecuación con efecto Allee (8) se obtiene la siguiente condición de estabilidad asintótica global para el equilibrio positivo  $x = K$ :

$$r(p + q) \leq 3/2. \quad (23)$$

Obsérvese que la condición (23) generaliza de forma natural la condición obtenida por Wright para la ecuación de Hutchinson, ya que para  $q = 0$  la ecuación (8) es precisamente la ecuación (5).

Para terminar esta sección, destacamos que las funciones que definen los modelos biológicos que hemos mencionado en la Sección 2 tienen derivada de Schwarz negativa, lo cual es una sorprendente propiedad común de todas estas ecuaciones. Esta observación ya fue notada en un contexto diferente por Mallet-Paret y Nussbaum [20].

## 6. Más sobre el número $3/2$ .

No podemos terminar sin darle al número  $3/2$  la importancia que merece. No en vano el libro de Kuang [15] tiene una sección titulada  $3/2$  *Stability Results* y cada año siguen apareciendo en la literatura científica nuevos artículos sobre este tipo de resultados. Es interesante también leer la página 164 del libro de Hale y Verduyn Lunel [10].

Publicado por primera vez en un medio accesible para la comunidad científica internacional el mismo año que apareció el teorema de Wright, el ensayo de Anatoli Myshkis sobre ecuaciones diferenciales con retraso también contiene resultados de estabilidad en los que el número  $3/2$  es crucial.

Consideremos la ecuación diferencial lineal con retardo no autónoma

$$x'(t) = -a(t)x(t-1), \quad t \geq 0, \quad (24)$$

donde  $0 < a(t) < 3/2, \forall t \in [0, \infty)$ . Los resultados de Myshkis prueban que entonces todas las soluciones de la ecuación (24) convergen a cero. Además, la constante  $3/2$  no puede ser mejorada: para cualquier valor de  $a_* > 3/2$  existe una función  $a(t)$  tal que  $0 < a(t) \leq a_*, \forall t \in [0, \infty)$  y la ecuación (24) tiene soluciones no acotadas. Por tanto,  $3/2$  juega un papel de punto de bifurcación (para el que el equilibrio pierde su estabilidad asintótica local) para la ecuación (24) análogo al que juega el número  $\pi/2$  para la ecuación lineal de coeficientes constantes (2).

En un artículo de 1970 [35], el célebre James Yorke (más conocido por sus aportaciones en sistemas dinámicos, y en particular en las primeras nociones de caos) obtuvo otro resultado de estabilidad para una ecuación funcional más general, conocido como *criterio  $3/2$  de Yorke*. Por supuesto el número protagonista vuelve a ser el mismo, agrandando así su leyenda. Cabe destacar que el teorema de Wright no puede obtenerse de los resultados de Yorke, ya

que la función  $f$  debe satisfacer cierta condición de sublinealidad que no cumple la función exponencial  $a(e^{-x} - 1)$ . Una generalización de las técnicas utilizadas en [17] nos ha llevado a probar un resultado que permite englobar los teoremas de Yorke y Wright bajo una formulación común. Dicho teorema ha sido publicado en [18].

Por cierto, el lector más atento habrá observado que el inefable  $3/2$  aparece también en la definición de la derivada de Schwarz. No me dirán que no tiene algo de mágico.

## Referencias

- [1] W. C. Allee, *Animal aggregations: a study in general sociology*. Chicago University Press, 1933.
- [2] B. Bánhelyi, *Investigation of a delayed differential equation with verified computing technique*. Extended Abstracts of the Conference of PhD. students in computer science, pp. 23-24, Universidad de Szeged, Hungría, Junio de 2006.
- [3] R. Bellman y K. L. Cooke, *Differential-Difference equations*. Academic Press, New York, 1963.
- [4] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems (Segunda edición)*. Addison-Wesley, 1989.
- [5] P. Erdős, *On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem*. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **35** (1949), 374-384.
- [6] E. Goles, O. Schulz y M. Markus, *Prime number selection of cycles in a predator-prey model*. Complexity **6** (2001), 33-38.
- [7] K. Gopalsamy, *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*. Kluwer, Dordrecht, 1992.
- [8] K. Gopalsamy, M. R. S. Kulenovic y G. Ladas, *On the oscillation and asymptotic behavior of  $N'(t) = N(t)[a + bN(t - \tau) - cN^2(t - \tau)]$* . Quart. Appl. Math. **3** (1990), 433-440.

- [9] K. Gopalsamy y G. Ladas, *Environmental periodicity and time delays in a "food-limited" population*. J. Math. Anal. Appl. **147** (1990), 545-555.
- [10] J. K. Hale y S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to functional differential equations*. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 1993.
- [11] A. Hastings, *Population Biology. Concepts and models*. Springer, 1998.
- [12] G. Hoffman de Visme, *The density of prime numbers*. Math. Gazette **45** (1961), 13-14.
- [13] G. E. Hutchinson, *Circular causal systems in ecology*. Ann. New York Acad. Sci. **50** (1948), 221-248.
- [14] V. Kolmanovskii y A. Myshkis, *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*. Mathematics and its Applications, Vol. 463, Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [15] Y. Kuang, *Delay differential equations with applications in population dynamics*. Academic Press, 1993.
- [16] E. Liz, G. Robledo y S. Trofimchuk, *La conjetura de Wright: entre la distribución de los números primos y el crecimiento de la población*. Cubo. Matemática Educacional **3** (2001), 89-107.
- [17] E. Liz, M. Pinto, G. Robledo, V. Tkachenko y S. Trofimchuk, *Wright type delay differential equations with negative Schwarzian*. Discrete Contin. Dynam. Syst., **9** (2003), 309-321.
- [18] E. Liz, V. Tkachenko y S. Trofimchuk, *Yorke and Wright 3/2-stability theorems from a unified point of view*. Discrete Contin. Dynam. Systems, Supplement Volume (2003), 580-589.
- [19] E. Liz, V. Tkachenko y S. Trofimchuk, *A global stability criterion for scalar functional differential equations*. SIAM J. Math. Anal. **35** (2003), 596-622.
- [20] J. Mallet-Paret y R. Nussbaum, *A differential-delay equation arising in optics and physiology*. SIAM J. Math. Anal., **20** (1989), 249-292.

- [21] J. Mawhin, *The legacy of Pierre-François Verhulst and Vito Volterra in population dynamics*, en “The first 60 years of nonlinear analysis of Jean Mawhin”, 147–160, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004.
- [22] R. M. May, *Stability and complexity in model ecosystems*. Princeton University Press, 1975.
- [23] A. Myshkis, *Lineare differentialgleichungen mit nacheilenden argumentom*. Deutscher Verlag, Berlín, 1955. (Traducción de la edición rusa de 1951).
- [24] S. Novo, R. Obaya y J. Rojo, *Ecuaciones y sistemas diferenciales*. McGraw-Hill, 1995.
- [25] A. J. Nicholson, *The self-adjustment of populations to change*. Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology, **22** (1957), 153-173.
- [26] E. C. Pielou, *Mathematical Ecology*. Wiley Interscience, 1977.
- [27] J. Sándor, D. S. Mitrović y B. Crstici, *Handbook of Number Theory*. Springer, Dordrecht, 2006.
- [28] A. Selberg, *An elementary proof of the prime-number theorem*. Ann. of Math. **50** (1949), 305-313.
- [29] D. Singer, *Stable orbits and bifurcation of maps of the interval*. SIAM J. Appl. Math. **35** (1978), 260-267.
- [30] F. E. Smith, *Population dynamics in *Daphnia magna* and a new model for population growth*. Ecology **44** (1963), 651-663.
- [31] H.-O. Walther, *Contracting return maps for some delay differential equations*. En Functional Differential and Difference Equations (T. Faria y P. Freitas Eds.), Fields Institute Communications series, A.M.S. 2001.
- [32] F. S. Wheeler, *Two differential-difference equations arising in number theory*. Trans. of the A.M.S. **318** (1990), 491-523.
- [33] E. M. Wright, *A non-linear difference-differential equation*. J. Reine Angew. Math. **194** (1955), 66-87.

- [34] E. M. Wright, *A functional equation in the heuristic theory of primes*. Math. Gazette **45** (1961), 15-16.
- [35] J. A. Yorke, *Asymptotic stability for one dimensional differential-delay equations*. J. Differential Equations **7** (1970), 189-202.
- [36] Z. X. Zheng y H. Wu, *On the functional-differential equation of the distribution of prime numbers*. Ann. Differential Equations **15** (1999), 99-106.



Departamento de Matemática Aplicada II  
E.T.S.E. Telecomunicación  
Universidade de Vigo  
eliz@dma.uvigo.es

*Publicat el 12 de desembre de 2006*