

# TEMA 5: INTERPOLACION NUMERICA

## 1 EL PROBLEMA GENERAL DE INTERPOLACION

En ocasiones se plantea el problema de que se conoce una tabla de valores de una función desconocida o difícil de manejar, y nos interesaría sustituirla por otra más sencilla (por ejemplo, un polinomio) que verifique la tabla de valores. Este es el problema de interpolación polinómica que introduciremos en este tema de forma abstracta:

El *Problema General de Interpolación* (P.G.I.) se plantea de la siguiente manera:

Sea  $L$  un espacio vectorial de dimensión  $N$  sobre  $R$ . Sean  $F_1, \dots, F_N \in L^*$ , esto es,  $N$  aplicaciones lineales

$$F_i : L \longrightarrow R, \quad i = 1, \dots, N.$$

Entonces, dados  $w_1, \dots, w_N \in R$ , encontrar  $f \in L$  tal que:

$$F_i(f) = w_i, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

**Teorema 1** .- (*Existencia y unicidad de solución del P.G.I.*)

*Son equivalentes:*

1. *Existe un único elemento  $f \in L$  tal que*

$$F_i(f) = w_i, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

2. *0 es el único elemento de  $L$  tal que*

$$F_i(f) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

3. *Para cualquier base  $\{f_1, \dots, f_N\}$  de  $L$  se tiene que  $\det(F_i(f_j)) \neq 0$ .*

4. *Existe, al menos, una base  $\{f_1, \dots, f_N\}$  de  $L$  tal que  $\det(F_i(f_j)) \neq 0$ .*

5.  *$\{F_1, \dots, F_N\}$  son linealmente independientes en  $L^*$ . (Y, por tanto, son base de  $L^*$ )*

En caso de que el P.G.I. tenga solución única, esta puede caracterizarse mediante el siguiente resultado:

**Teorema 2** .- (*Representación de Lagrange*)

*Sea  $L$  un espacio vectorial de dimensión  $N$  sobre  $R$ .*

*Sea  $\{F_1, \dots, F_N\}$  una base de  $L^*$ .*

*Sea  $\{f_1^*, \dots, f_N^*\}$  su base dual, es decir:*

$$F_i(f_j^*) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

Entonces, dados  $w_1, \dots, w_N \in R$ , el único elemento  $f \in L$  tal que:

$$F_i(f) = w_i, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

se escribe de la forma:

$$f = \sum_{i=1}^N w_i f_i^*.$$

### Casos particulares:

#### A) Interpolación de LAGRANGE:

Sean  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $(n+1)$  puntos distintos de  $R$ . Sean  $w_0, w_1, \dots, w_n$ ,  $(n+1)$  valores reales arbitrarios. Entonces existe un único polinomio  $P(x)$  de grado  $\leq n$  tal que

$$P(x_i) = w_i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n.$$

Para demostrarlo basta tomar en el Teorema 1:

$$L = \mathcal{P}_n(R) = \langle \{1, x, \dots, x^n\} \rangle, \quad N = n + 1,$$

$$F_i : p \in \mathcal{P}_n(R) \rightarrow F_i(p) = p(x_i) \in R, \quad i = 0, \dots, n.$$

(El sistema  $\{F_0, \dots, F_n\}$  una base porque el determinante resultante al aplicarlo a la base  $\{1, x, \dots, x^n\}$  es no nulo).

Al polinomio  $P(x)$  se le llama *polinomio de interpolación de Lagrange* de grado  $n$  en los nodos  $x_0, \dots, x_n$ .

La base dual, que denominaremos  $\{l_0, \dots, l_n\}$ , viene dada por:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Entonces:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n w_i l_i(x).$$

### **B) Interpolación de TAYLOR:**

Sea  $x_0 \in R$ . Sean  $w_0, w_1, \dots, w_n$ ,  $(n+1)$  valores reales arbitrarios. Entonces existe un único polinomio  $P(x)$  de grado  $\leq n$  tal que

$$P^{(i)}(x_0) = w_i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n.$$

Para demostrarlo basta tomar en el Teorema 1:

$$L = \mathcal{P}_n(R), \quad N = n + 1$$

$$F_i : p \in \mathcal{P}_n(R) \rightarrow F_i(p) = p^{(i)}(x_0) \in R, \quad i = 0, \dots, n$$

Al polinomio  $P(x)$  se le llama *polinomio de interpolación de Taylor* de grado  $n$  en el punto  $x_0$ .

La base dual, que denominaremos  $\{t_0, \dots, t_n\}$ , viene dada por:

$$t_i(x) = \frac{(x - x_0)^i}{i!}$$

Entonces:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n w_i t_i(x).$$

### C) Interpolación de HERMITE:

Sean  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $(n+1)$  puntos distintos de  $R$ . Sean  $w_0, w_1, \dots, w_{2n+1}$ ,  $(2n+2)$  valores reales arbitrarios. Entonces existe un único polinomio  $P(x)$  de grado  $\leq 2n+1$  tal que

$$P(x_i) = w_i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n,$$

$$P'(x_{i-(n+1)}) = w_i, \quad \forall i = n+1, \dots, 2n+1.$$

Para demostrarlo basta tomar en el Teorema 1:

$$L = \mathcal{P}_{2n+1}(R), \quad N = 2n+2,$$

$$F_i : p \in \mathcal{P}_{2n+1}(R) \rightarrow F_i(p) = p(x_i) \in R, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$F_i : p \in \mathcal{P}_{2n+1}(R) \rightarrow F_i(p) = p'(x_{i-(n+1)}) \in R,$$

$$i = n+1, \dots, 2n+1.$$

Al polinomio  $P(x)$  se le llama *polinomio de interpolación de Hermite*.

La base dual, que denominaremos  $\{h_0, \dots, h_{2n+1}\}$ , viene dada por:

$$h_i(x) = l_i^2(x) \left[ 1 - \frac{\pi''(x_i)}{\pi'(x_i)}(x - x_i) \right], \quad i = 0, \dots, n,$$

$$h_i(x) = (x - x_{i-(n+1)}) l_{i-(n+1)}^2(x), \quad i = n+1, \dots, 2n+1$$

donde:

$$\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Entonces:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{2n+1} w_i h_i(x).$$

### **Ejemplo 1 .-**

*Encontrar un polinomio  $P(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  tal que:*

$$P(0) = 1, \quad P(1) = 1, \quad P'(0) = 0, \quad P'(1) = 1.$$

*Tomamos  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ . Entonces:*

$$l_0(x) = 1 - x, \quad l_1(x) = x$$

$$\pi(x) = x(x - 1) = x^2 - x$$

$$h_0(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, \quad h_1(x) = 3x^2 - 2x^3,$$

$$h_2(x) = x^3 - 2x^2 + x, \quad h_3(x) = x^3 - x^2.$$

*Por tanto:*

$$P(x) = h_0(x) + h_1(x) + h_3(x) = x^3 - x^2 + 1.$$

**Observación 1 .-** *La interpolación de Hermite puede hacerse en general, no sólo para la primera derivada, sino para derivadas de cualquier orden.*

*Además de la interpolación polinómica, de la que hemos visto tres ejemplos diferentes, se puede hablar de interpolación trigonométrica, exponencial, logarítmica, ...*

## 2 DIFERENCIAS DIVIDIDAS: FORMULA DE NEWTON

El método dado para calcular el polinomio de Lagrange relativo a los nodos  $x_0, \dots, x_n$  y a los valores  $w_0, \dots, w_n$  es complicado y obliga a rehacer todos los cálculos si se añade algún nodo nuevo.

Vamos a presentar un nuevo método para el cálculo del polinomio de Lagrange que evita estos problemas. Para ello definiremos las *diferencias divididas* de la siguiente forma:

Diferencias divididas de orden 0:

$$[w_i] = w_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Diferencias divididas de orden 1:

$$[w_i, w_{i+1}] = \frac{[w_{i+1}] - [w_i]}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Diferencias divididas de orden 2:

$$[w_i, w_{i+1}, w_{i+2}] = \frac{[w_{i+1}, w_{i+2}] - [w_i, w_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}, \quad i = 0, \dots, n-2.$$

Diferencias divididas de orden  $k$ :

$$[w_i, w_{i+1}, \dots, w_{i+k}] = \frac{[w_{i+1}, \dots, w_{i+k}] - [w_i, \dots, w_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i},$$
$$i = 0, \dots, n-k.$$

Presentan la ventaja de que se pueden tabular de forma sencilla.

**Ejemplo 2** .- (Corresponde a la función  $f(x) = x^3$  en los nodos 0, 2, 3, 5 y 6, a los que se ha añadido posteriormente el nuevo nodo 1)

0	0				
		4			
2	8	5			
		19	1		
3	27	10		0	
		49	1	<b>0</b>	
5	125	14		<b>0</b>	
		91	<b>1</b>		
6	216	<b>12</b>			
		<b>43</b>			
<b>1</b>	<b>1</b>				

**Teorema 3** .-

1. Sea  $\sigma$  una permutación del conjunto  $\{0, 1, \dots, r\}$ .  
Entonces:

$$[w_0, w_1, \dots, w_r] = [w_{\sigma(0)}, w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(r)}]$$

- 2.

$$[w_0, w_1, \dots, w_r] = \frac{w_0}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_r)} + \frac{w_1}{(x_1 - x_0) \dots (x_1 - x_r)} + \dots + \frac{w_r}{(x_r - x_0) \dots (x_r - x_{r-1})}$$



**Teorema 4** .- *El polinomio de interpolación de Lagrange relativo a los nodos  $x_0, \dots, x_n$  y a los valores  $w_0, \dots, w_n$  se escribe:*

$$P_n(x) = [w_0] + [w_0, w_1](x - x_0) + [w_0, w_1, w_2](x - x_0)(x - x_1) \\ + \dots + [w_0, w_1, \dots, w_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

*Además, si los valores  $w_i$  corresponden a la evaluación de una función  $f$  en los puntos  $x_i$ , esto es:  $w_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , entonces denotando:*

$$f[x_0, x_1, \dots, x_r] = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_r)]$$

*se tiene la fórmula de Newton:*

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

*También, para  $x \neq x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , se tiene que el error cometido a interpolar la función  $f$  por el polinomio de Lagrange  $P_n$  es:*

$$f(x) - P_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n).$$

**Observación 2** .- *Esta fórmula de error es muy poco práctica, pero se podría mejorar si  $f$  fuese de clase  $(n+1)$  en un intervalo  $[a, b]$  conteniendo a los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n, x$ .*

**Teorema 5 .-** (*Fórmula de Cauchy para el error de interpolación*)

Si  $f \in C^{n+1}([a, b])$ , entonces  $\forall x \in (a, b)$  :

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \left\{ \sup_{\zeta \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(\zeta)|}{(n+1)!} \right\} |x - x_0| \dots |x - x_{n-1}| |x - x_n|$$

**Ejemplo 3 .-** *En el ejemplo anterior, el polinomio de Lagrange correspondiente a los 6 nodos será:*

$$\begin{aligned} P_5(x) &= 0 + 4x + 5x(x - 2) + 1x(x - 2)(x - 3) \\ &+ 0x(x - 2)(x - 3)(x - 5) + 0x(x - 2)(x - 3)(x - 5)(x - 6) \\ &= 4x + 5x^2 - 10x + x^3 - 5x^2 + 6x = x^3. \end{aligned}$$

Además, por la fórmula de Cauchy, como  $f^{(6)}(x) = 0$ , el error es nulo, es decir, el polinomio de Lagrange  $P_5$  coincide exactamente con la función  $f$ .

**Observación 3 .-** *Se puede plantear el problema de determinar los nodos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  de manera que el error sea mínimo. La solución al problema es tomar:*

$$x_j = \frac{1}{2}[(b - a)\xi_j + b + a], \quad j = 0, \dots, n,$$

siendo:

$$\xi_j = \cos\left(\frac{2j + 1}{2n + 1}\pi\right).$$

En este caso:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \left\{ \sup_{\zeta \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(\zeta)|}{(n+1)!} \right\} \frac{(b - a)^{n+1}}{2^{n+1}}$$

### 3 NODOS EQUIESPACIADOS: DIFERENCIAS FINITAS

En el caso en que todos los nodos tienen la misma separación entre ellos (*nodos equiespaciados*), se pueden obtener expresiones aún más sencillas del polinomio de Lagrange.

Sea  $h$  el *paso* o separación entre dos nodos consecutivos:

$$x_j = x_0 + jh, \quad j = 0, \dots, n.$$

Se definen las *diferencias finitas progresivas* de la forma siguiente:

Orden 0:

$$\Delta^0 w_i = w_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Orden  $k$ :

$$\Delta^k w_i = \Delta^{k-1} w_{i+1} - \Delta^{k-1} w_i, \quad i = 0, \dots, n - k.$$

Se definen las *diferencias finitas regresivas*:

Orden 0:

$$\nabla^0 w_i = w_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Orden  $k$ :

$$\nabla^k w_i = \nabla^{k-1} w_i - \nabla^{k-1} w_{i-1}, \quad i = k, \dots, n.$$

Entonces, se verifican las siguientes relaciones:

**Teorema 6 .-**

1.

$$[w_i, \dots, w_{i+k}] = \frac{\Delta^k w_i}{k! h^k}$$

2.

$$\Delta^k w_i = \nabla^k w_{i+k}$$

Por tanto, se puede escribir el polinomio de Lagrange de las siguientes formas equivalentes:

1) Fórmula de Newton-Gregory progresiva:

$$P_n(x) = \Delta^0 w_0 + \frac{\Delta^1 w_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 w_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) \\ + \dots + \frac{\Delta^n w_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

2) Fórmula de Newton-Gregory regresiva:

$$P_n(x) = \nabla^0 w_n + \frac{\nabla^1 w_n}{h}(x - x_n) + \frac{\nabla^2 w_n}{2! h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \\ + \dots + \frac{\nabla^n w_n}{n! h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1).$$

### Ejemplo 4 .-

Se tiene la tabla de valores:

-2	8			
		1		
-1	9	0		
		1	1	
0	10	1	1	
		2	2	
1	12	3		
		5		
2	17			

*Newton-Gregory progresiva:*

$$P(x) = 8 + 1(x+2) + \frac{0}{2!}(x+2)(x+1) + \frac{1}{3!}(x+2)(x+1)x + \frac{1}{4!}(x+2)(x+1)x(x-1)$$

*Newton-Gregory regresiva:*

$$P(x) = 17 + 5(x-2) + \frac{3}{2!}(x-2)(x-1) + \frac{2}{3!}(x-2)(x-1)x + \frac{1}{4!}(x-2)(x-1)x(x+1)$$

## 4 INTERPOLACION POR SPLINES

La interpolación polinómica se basa en la sustitución de una función o una tabla de valores por un polinomio que toma dichos valores. Cuando el número de puntos aumenta, también aumenta el grado del polinomio, que se hace más oscilante (lo cual se traduce en un aumento de los errores).

Un enfoque alternativo a la utilización de polinomios de grado alto es el uso de polinomios de grado menor en subintervalos. Esta es la base de la interpolación con *splines*.

Dados  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ ,  $(n + 1)$  puntos distintos de  $R$  y dados  $f_0, f_1, \dots, f_n$ ,  $(n + 1)$  valores reales arbitrarios, se denomina función *spline* de orden  $p$  (o también  $p$ -spline) interpolador de los datos  $\{(x_i, f_i), i = 0, \dots, n\}$  a una función real  $S$  definida en  $[a, b]$  verificando:

1.  $S \in C^{p-1}([a, b])$
2. En cada subintervalo  $[x_i, x_{i+1}]$  es un polinomio de grado  $p$
3.  $S(x_i) = f_i, \quad \forall i = 0, \dots, n.$

El más utilizado en la práctica es el de orden 3 o spline cúbico (una función de clase 2 donde cada trozo es un polinomio de grado 3).

En este caso, definiendo  $S_i = S_{|[x_i, x_{i+1}]}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , se debe verificar:

$$S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i) = f_i,$$

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i),$$

$$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i),$$

para cada  $i = 1, \dots, n-1$ .

Veamos a continuación un algoritmo que permite calcular los polinomios  $S_i$ , transformando el problema de interpolación en la resolución de un sistema lineal cuyas incógnitas son las derivadas segundas  $S''_i(x_i)$ .

### Cálculo del spline cúbico:

Como  $S_i$  es un polinomio de grado 3,  $S''_i$  es un polinomio de grado 1. Para determinarlo, si llamamos:

$$S''_i(x_i) = f''_i, \quad S''_i(x_{i+1}) = f''_{i+1},$$

se tiene:

$$\begin{aligned} S''_i(x) &= f''_i \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + f''_{i+1} \frac{x_i - x}{x_i - x_{i+1}} \\ &= f''_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + f''_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}, \end{aligned}$$

donde  $h_i = x_{i+1} - x_i$ .

Integrando dos veces la expresión, se tiene:

$$S_i(x) = f_i'' \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + f_{i+1}'' \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + a_i(x_{i+1} - x) + b_i(x - x_i),$$

donde  $a_i$  y  $b_i$  son las dos constantes de integración que se pueden determinar imponiendo:

$$S_i(x_i) = f_i, \quad S_i(x_{i+1}) = f_{i+1}.$$

Entonces:

$$a_i = \frac{f_i}{h_i} - f_i'' \frac{h_i}{6}, \quad b_i = \frac{f_{i+1}}{h_i} - f_{i+1}'' \frac{h_i}{6}.$$

De esta forma tenemos  $S_i(x)$  expresado en función de las incógnitas  $f_i''$  y  $f_{i+1}''$ .

Imponiendo ahora que:

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i), \quad i = 1, \dots, n - 1$$

se obtienen las  $(n - 1)$  ecuaciones:

$$h_i f_{i+1}'' + 2(h_i + h_{i-1}) f_i'' + h_{i-1} f_{i-1}'' = 6 \left( \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \right) = c_i,$$

$$i = 1, \dots, n - 1.$$

Se tiene entonces un sistema de  $(n - 1)$  ecuaciones con  $(n + 1)$  incógnitas:  $f_0'', \dots, f_n''$ .

A fin de obtener un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, se puede:



i) Reducir el número de incógnitas, imponiendo, por ejemplo, los valores de  $f_0''$  y  $f_n''$  :

Es el caso del *spline natural* :

$$f_0'' = f_n'' = 0.$$

ii) Añadir dos nuevas ecuaciones independientes con las  $(n - 1)$  anteriores:

Por ejemplo, el *spline periódico* (si  $f_0 = f_n$ ) :

$$S'(x_0) = S'(x_n),$$

$$S''(x_0) = S''(x_n).$$

Así, en el caso del spline natural, las ecuaciones anteriores pueden escribirse en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2(h_1 + h_0) & h_1 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_2 + h_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & h_{n-2} \\ 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-1} + h_{n-2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1'' \\ f_2'' \\ \vdots \\ f_{n-1}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

que es un sistema con matriz tridiagonal simétrica y de diagonal estrictamente dominante (y, por tanto, inversible). Así pues, el sistema tiene solución única.

Entonces, resolviendo el sistema tridiagonal, se calculan  $f_1'', \dots, f_{n-1}''$ . A partir de ellos se obtienen los valores de  $a_i$  y  $b_i$ , que finalmente nos permitirán construir los polinomios  $S_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ .

