TEMA 7: INTEGRACION NUMERICA

1. INTRODUCCION

La necesidad de aproximar numéricamente el valor de una integral surge por dos motivos fundamentalmente:

- la dificultad o imposibilidad en el cálculo de una primitiva,
- la función a integrar sólo se conoce por una tabla de valores.

Sea, entonces, una función $f : [a, b] \longrightarrow R$. Supongamos que se conocen los valores de f en los $(n + 1)$ nodos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Trataremos de aproximar la integral $\int_a^b f(x)dx$ por una *fórmula de cuadratura* del tipo:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i).$$

Nos restringiremos al estudio de las fórmulas *de tipo interpolatorio polinómico*, esto es:

$$f(x) \simeq \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x) \Rightarrow$$
$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)dx.$$

Por tanto, los coeficientes de la fórmula son:

$$A_i = \int_a^b l_i(x)dx, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Teorema 1 .- *Una fórmula de cuadratura:*

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i)$$

es de tipo interpolatorio polinómico si y sólo si es exacta en $\mathcal{P}_n(R)$.

Entonces, para el cálculo de los coeficientes A_i impondremos la exactitud de la fórmula sobre los polinomios $x^k,\ 0 \leq k \leq n,$ de la base de $\mathcal{P}_n(R)$:

$$\sum_{i=0}^{n} A_i\, x_i^k = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Este S.E.L. de $(n+1)$ ecuaciones y $(n+1)$ incógnitas con matriz de Vandermonde (por tanto, inversible) tiene solución única. Resolviendo el sistema se obtienen los valores de los coeficientes $A_i,\ i = 0, \ldots, n.$

Ejemplo 1 .-

Partimos de la tabla de valores:

x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	2	-1	3

Entonces, para:

$$x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1$$

se busca:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)dx &\simeq A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) \\ &= 2A_0 - A_1 + 3A_2. \end{aligned}$$

Debemos resolver el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{llll} A_0 & +A_1 & +A_2 & = 2 \\ -A_0 & & +A_2 & = 0 \\ A_0 & & +A_2 & = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

La solución es:

$$A_0 = \frac{1}{3},\ A_1 = \frac{4}{3},\ A_2 = \frac{1}{3}$$

Por tanto:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq 2.\frac{1}{3} - \frac{4}{3} + 3.\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Teorema 2 .- *(Fórmula para el error de integración) Sea $[c,d]$ un intervalo que contenga a $[a,b]$ y a los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Si $f \in C^{n+1}([c,d])$ y el polinomio $\pi(x) = (x-x_0)\ldots(x-x_n)$ no cambia de signo en (a,b), entonces el error cometido por la fórmula de cuadratura de T.I.P. es:*

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_n(x)dx = \frac{f^{(n+1}(\zeta)}{(n+1)!}\int_a^b \pi(x)dx,$$

con $\zeta \in (a,b)$.

Ejemplo 2 .-

1. *Fórmula de Poncelet (o del punto medio):*

$$n = 0: \qquad x_0 = \frac{a+b}{2}.$$

$$A_0 = b - a.$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)\, f(\frac{a+b}{2}).$$

$$|Error| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \max_{\zeta\in[a,b]} |f''(\zeta)|.$$

2. Fórmula del Trapecio:

$$n=1: \qquad x_0=a,\ x_1=b.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} A_0 & +A_1 & =b-a \\ A_0 a & +A_1 b & =\frac{b^2-a^2}{2} \end{array}\right. \Rightarrow\ A_0=A_1=\frac{b-a}{2}.$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2}\,[f(a)+f(b)]$$

$$|Error| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{\zeta\in[a,b]} |f''(\zeta)|.$$

3. Fórmula de Simpson:

$$n=2: \qquad x_0=a,\ x_1=\frac{a+b}{2},\ x_2=b.$$

$$\left\{\begin{array}{llll} A_0 & +A_1 & +A_2 & =b-a \\ A_0 a & +A_1\frac{a+b}{2} & +A_2 b & =\frac{b^2-a^2}{2} \\ A_0 a^2 & +A_1(\frac{a+b}{2})^2 & +A_2 b^2 & =\frac{b^3-a^3}{3} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow A_0=A_2=\frac{b-a}{6},\ A_1=\frac{2}{3}(b-a).$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6}\,[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)].$$

$$|Error| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \max_{\zeta\in[a,b]} |f^{IV}(\zeta)|.$$

2. PROPIEDADES

1. **Invarianza por traslaciones:**

   Si
   $$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^n A_i\, f(x_i)$$
   $$\int_{a+d}^{b+d} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^n B_i\, f(x_i+d)$$
   entonces $\quad B_i = A_i, \quad \forall i = 0, \ldots, n.$

2. **Modificación por homotecias:**

   Si
   $$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^n A_i\, f(x_i)$$
   $$\int_{ca}^{cb} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^n B_i\, f(cx_i)$$
   entonces $\quad B_i = c\, A_i, \quad \forall i = 0, \ldots, n.$

3. **Simetría:**

   Si los nodos están dispuestos simétricamente respecto del centro del intervalo (a, b), es decir:
   $$\frac{a+b}{2} - x_i = x_{n-i} - \frac{a+b}{2}, \quad i = 0, \ldots, n,$$
   entonces los coeficientes de la fórmula
   $$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^n A_i\, f(x_i)$$
   verifican $\quad A_i = A_{n-i}, \quad \forall i = 0, \ldots, n.$

Observación 1 .- *(Fórmulas de Newton-Cotes)*

Cuando los nodos de cuadratura en el intervalo $[a, b]$ *son equiespaciados surgen las fórmulas de Newton-Cotes.*

Se habla de fórmulas cerradas cuando los dos extremos del intervalo son nodos.

En caso contrario, cuando los extremos no son nodos de cuadratura, se habla de fórmulas abiertas.

Por ejemplo, Trapecio y Simpson son fórmulas de Newton-Cotes cerradas.
En cambio, Poncelet es una fórmula de Newton-Cotes abierta.

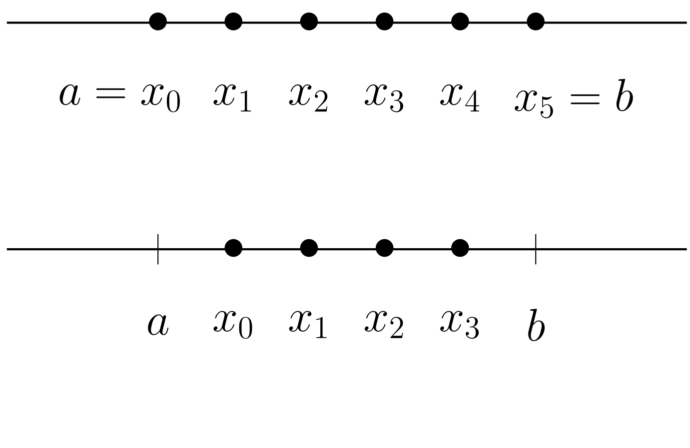

Figura 1: Newton-Cotes cerrada (superior) y abierta (inferior)

3. FORMULAS DE CUADRATURA COMPUESTAS

Consisten en dividir el intervalo $[a,b]$ en subintervalos, a cada uno de los cuales se le aplica una fórmula de Newton-Cotes.

Supongamos m subintervalos con $(n+1)$ nodos cada uno:

$$H = \frac{b-a}{m}, \qquad h = \frac{H}{n}.$$

$$y_j = a + jH, \quad j = 0, \ldots, m.$$
$$x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, mn.$$

Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x)dx,$$

con:

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x)dx \simeq \sum_{k=0}^{n} A_k\, f(y_{j-1}+kh), \quad j = 1, \ldots, m.$$

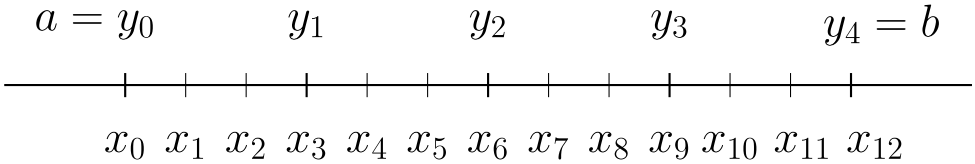

Figura 2: Ejemplo de fórmula compuesta para $m = 4,\ n = 3$.

Ejemplo 3 .-

1. *Trapecio compuesto:*

$$n = 1: \qquad h = \frac{b-a}{m}.$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h\left\{ \frac{1}{2}[f(a)+f(b)] + \sum_{k=1}^{m-1} f(a+kh)\right\}.$$

$$|Error| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} \max_{\zeta\in[a,b]} |f''(\zeta)|.$$

2. *Simpson compuesto:*

$$n = 2: \qquad h = \frac{b-a}{2m}.$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(a)+f(b) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a+2kh) \right.$$

$$\left. +4\sum_{k=1}^{m} f(a+(2k-1)h)\right].$$

$$|Error| \leq \frac{(b-a)^5}{2880m^4} \max_{\zeta\in[a,b]} |f^{IV}(\zeta)|.$$