TEMA 8: ECUACIONES EN DIFERENCIAS

1 CONCEPTOS BASICOS

Una **ecuación en diferencias** es una expresión del tipo:

$$G(n, f(n), f(n+1), \ldots, f(n+k)) = 0, \quad \forall n \in Z,$$

donde f es una función definida en Z.

Si después de simplificar esta expresión quedan los términos $f(n+k_1)$ y $f(n+k_2)$ como el mayor y el menor, respectivamente, se dice que la ecuación es de **orden** $k = k_1 - k_2$.

Ejemplo 1 .- *La ecuación:*

$$5f(n+4) - 4f(n+2) + f(n+1) + (n-2)^3 = 0$$

es de orden $4 - 1 = 3$.

Una ecuación en diferencias de orden k se dice **lineal** si puede expresarse de la forma:

$$p_0(n)f(n+k)+p_1(n)f(n+k-1)+\ldots+p_k(n)f(n) = g(n),$$

donde los coeficientes p_i son funciones definidas en Z.

El caso más sencillo es cuando los coeficientes son constantes $p_i(n) = a_i$:

$$a_0f(n + k) + a_1f(n + k - 1) + \ldots + a_kf(n) = g(n).$$

La ecuación en diferencias se dice **homogénea** en el caso de que $g(n) = 0$, y **completa** en el caso contrario.

Teorema 1 .- *Dada la ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes y de orden k :*

$$a_0f(n + k) + a_1f(n + k - 1) + \ldots + a_kf(n) = g(n),$$

el problema de hallar una función f definida en Z, que verifique la ecuación, y tal que en los k enteros consecutivos $n_0, n_0+1, \ldots, n_0+k-1$ tome los valores dados $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$, tiene solución única.

Teorema 2 .- *Dada una ecuación en diferencias lineal homogénea de coeficientes constantes y de orden k entonces, si una solución f en nula en k enteros consecutivos, es idénticamente nula.*

Teorema 3 .- *Toda combinación lineal de soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea de coeficientes constantes y de orden k es también solución de dicha ecuación.*

Se llama **sistema fundamental de soluciones** de una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden k a todo conjunto $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ de soluciones de dicha ecuación que verifica para algún $n_0 \in Z$ que la **matriz fundamental** es inversible, esto es:

$$D(n_0) = \begin{vmatrix} f_1(n_0) & f_2(n_0) & \ldots & f_k(n_0) \\ f_1(n_0+1) & f_2(n_0+1) & \ldots & f_k(n_0+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(n_0+k-1) & f_2(n_0+k-1) & \ldots & f_k(n_0+k-1) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Teorema 4 .- *Sea $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ un sistema fundamental de soluciones de una ecuación en diferencias lineal. Entonces:*

1. $D(n) \neq 0, \quad \forall n \in Z.$
2. *Toda solución de la ecuación homogénea es combinación lineal de $f_1, f_2, \ldots, f_k$, es decir:*

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \, f_i(n).$$

3. Si $z(n)$ es una solución de la ecuación completa, entonces toda solución de dicha ecuación se puede escribir como la suma de $z(n)$ y de la solución general de la ecuación homogénea, esto es:

$$f(n) = z(n) + \sum_{i=1}^{k} c_i\, f_i(n).$$

Observación 1 .- *Frecuentemente se suele denotar*

$$y_{n+j} = f(n+j),$$

con lo cual la ecuación en diferencias se escribe:

$$a_0\, y_{n+k} + a_1\, y_{n+k-1} + \ldots + a_k\, y_n = g_n, \quad \forall n \in Z.$$

Ejemplo 2 .- *Hallar la ecuación en diferencias que satisface la familia de funciones:*

$$f(n) = c_1\, 2^n + c_2.$$

$$\left.\begin{array}{rrr} f(n) = & c_1 2^n & +c_2 \\ f(n+1) = & 2c_1 2^n & +c_2 \\ f(n+2) = & 4c_1 2^n & +c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rr} c_1 2^n = & f(n+1) - f(n) \\ c_2 = & 2f(n+1) - f(n+2) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\ f(n) = f(n+1) - f(n) + 2f(n+1) - f(n+2)$$

$$\Rightarrow\ f(n+2) - 3f(n+1) + 2f(n) = 0.$$

Ejemplo 3 .- *Hallar la solución de la ecuación en diferencias no lineal:*

$$y_n\, y_{n-1} + y_n - y_{n-1} = 0, \quad \forall n \in Z,$$

que verifica $y_0 = c.$

Despejando y_n *se tiene:*

$$y_n = \frac{y_{n-1}}{y_{n-1}+1}, \quad \forall n \in Z.$$

Por tanto, sustituyendo:

$$y_n = \frac{y_{n-1}}{y_{n-1}+1} = \frac{y_{n-2}}{2y_{n-2}+1} = \ldots = \frac{y_0}{ny_0+1}.$$

Es decir:

$$y_n = \frac{c}{cn+1}.$$

2 SOLUCION DE LA ECUACION HOMOGENEA

Sea la ecuación en diferencias lineal homogénea de coeficientes constantes y de orden k :

$$a_0 f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \ldots + a_k f(n) = 0, \quad \forall n \in Z.$$

Buscaremos soluciones del tipo $f(n) = r^n$. Entonces:

$$r^n(a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \ldots + a_k) = 0$$

$$\Rightarrow \ a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \ldots + a_k = 0.$$

Por tanto, r es raíz de la **ecuación característica** $a_0r^k + a_1r^{k-1} + \ldots + a_k = 0$.

El estudio de la solución dependerá de si las raíces de la ecuación característica son simples o múltiples.

2.1 Raíces simples

Sean $r_1, r_2, \ldots, r_k$ las k raíces de la ecuación característica. Se definen entonces las funciones:

$$f_j(n) = r_j^n, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Entonces $\{f_1, \ldots, f_k\}$ es un sistema fundamental de soluciones, lo cual nos permite resolver la ecuación.

Si alguna raíz r es compleja, también su conjugada $\bar{r}$ es raíz. Dado que toda combinación lineal de r^n y $\bar{r}^n$ es solución de la ecuación, en particular lo son:

$$Re(r^n) = \frac{1}{2}(r^n + \bar{r}^n),$$

$$Im(r^n) = \frac{1}{2i}(r^n - \bar{r}^n).$$

Entonces, a fin de evitar trabajar con soluciones complejas, en el sistema fundamental se pueden sustituir los términos complejos r^n y $\bar{r}^n$ por los correspondientes términos reales $Re(r^n)$ e $Im(r^n)$.

Observación 2 .- *A la hora del cálculo de la solución debe tenerse en cuenta que:*

$$r = \rho(cos(\theta)+i\,sen(\theta)) \;\Rightarrow\; r^n = \rho^n(cos(n\theta)+i\,sen(n\theta))$$

$$\Rightarrow\; Re(r^n) = \rho^n cos(n\theta), \quad Im(r^n) = \rho^n sen(n\theta).$$

2.2 Raíces múltiples

Sea r una raíz de multiplicidad m de la ecuación característica. Esta raíz proporciona m soluciones diferentes del tipo:

$$f_j(n) = n^j r^n, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Por tanto, pasarán a formar parte del sistema fundamental de soluciones las funciones $f_0, \ldots, f_{m-1}$, esto es:

$$r^n,\ nr^n,\ n^2r^n, \ldots, n^{m-1}r^n.$$

Ejemplo 4 .- *Hallar la solución de:*

$$f(n+2) - 4f(n+1) + 3f(n) = 0, \quad \forall n \in Z,$$

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

La ecuación característica es:

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = 3,\ r_2 = 1.$$

Por tanto:

$$f(n) = c_1 3^n + c_2 1^n = c_1 3^n + c_2.$$

Por otra parte:

$$\left.\begin{array}{rcl} f(0) = & c_1 + c_2 & = 0 \\ f(1) = & 3c_1 + c_2 & = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \; c_1 = \frac{1}{2}, \; c_2 = -\frac{1}{2}.$$

De donde:

$$f(n) = \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Ejemplo 5 *.- Hallar la solución de:*

$$f(n+2) - f(n+1) + f(n) = 0, \quad \forall n \in Z,$$

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

La ecuación característica es:

$$r^2 - r + 1 = 0 \; \Rightarrow \; r_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \; r_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

O equivalentemente:

$$r_1 = cos(\frac{\pi}{3}) + i\,sen(\frac{\pi}{3}), \quad r_2 = \bar{r}_1.$$

Por tanto:

$$f(n) = c_1 1^n cos(\frac{n\pi}{3}) + c_2 1^n sen(\frac{n\pi}{3})$$

$$= c_1 cos(\frac{n\pi}{3}) + c_2 sen(\frac{n\pi}{3}).$$

Por otra parte:

$$\left.\begin{array}{rcl} f(0) = & c_1 & = 0 \\ f(1) = & \frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 & = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \; c_1 = 0, \; c_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

De donde:

$$f(n) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,sen(\frac{n\pi}{3}).$$

Ejemplo 6 .- *Hallar la solución de:*

$$f(n+3) - 7f(n+2) + 15f(n+1) - 9f(n) = 0, \quad \forall n \in Z,$$

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 17.$$

La ecuación característica es:

$$r^3 - 7r^2 + 15r - 9 = 0 \; \Rightarrow \; r_1 = 1, \; r_2 = r_3 = 3.$$

Por tanto:

$$f(n) = c_1 1^n + c_2 3^n + c_3 n 3^n$$

$$= c_1 + c_2 3^n + c_3 n 3^n.$$

Por otra parte:

$$\left.\begin{array}{rcl} f(0) = & c_1 + c_2 & = -1 \\ f(1) = & c_1 + 3c_2 + 3c_3 & = 2 \\ f(2) = & c_1 + 9c_2 + 18c_3 & = 17 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = -1, \; c_2 = 0, \; c_3 = 1.$$

De donde:

$$f(n) = n3^n - 1.$$

3 SOLUCION DE LA ECUACION COMPLETA

Para encontrar una solución de la ecuación en diferencias lineal completa de coeficientes constantes y de orden k :

$$a_0 f(n+k)+a_1 f(n+k-1)+\ldots+a_k f(n) = g(n), \quad \forall n \in Z,$$

debemos buscar una solución particular y sumarle la solución general de la ecuación homogénea correspondiente (que ya sabemos calcular).

Por tanto, sólo necesitamos una solución particular de la ecuación completa. Para buscarla procederemos según la naturaleza de la función $g(n)$.

Veremos el caso más simple: $g(n) = a^n\, p(n)$, donde a es una constante y p es un polinomio de grado m.
Se prueba como solución particular:

$$z(n) = a^n\, q(n),$$

donde q es un polinomio del mismo grado si z no tiene factores comunes con la solución general de la ecuación homogénea (o un polinomio del mismo grado multiplicado por una potencia de n en caso contrario).

Observación 3 .- *Para el caso de una función $g(n)$ general existe el método de variación de constantes (completamente análogo al explicado para ecuaciones diferenciales ordinarias).*

Ejemplo 7 .- *Hallar la solución general de:*

$$f(n+2) - f(n+1) + f(n) = n, \quad \forall n \in Z.$$

Como ya hemos visto, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y(n) = c_1 cos(\frac{n\pi}{3}) + c_2 sen(\frac{n\pi}{3}).$$

Una solución particular de la completa será de la forma $z(n) = an + b$. *Para determinar el valor de* a *y* b *se sustituye en la ecuación:*

$$a(n+2) + b - a(n+1) - b + an + b = n$$

$$\Rightarrow \; an + a + b = n$$

$$\Rightarrow \; \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \;\Rightarrow\; b = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; z(n) = n - 1.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación completa es:

$$f(n) = c_1 cos(\frac{n\pi}{3}) + c_2 sen(\frac{n\pi}{3}) + n - 1.$$

Ejemplo 8 .- *Hallar la solución general de:*

$$f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = n+1, \quad \forall n \in Z.$$

La ecuación característica es:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = r_2 = 1.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y(n) = c_1 + c_2 n.$$

Una solución particular de la completa será de la forma $z(n) = n^{\alpha}(an+b)$*, pues* $y(n)$ *y* $an+b$ *tienen factores en común. Se tomará como* α *el menor natural tal que* $y(n)$ *y* $z(n)$ *ya no tengan factores en común. Por tanto, debemos tomar* $\alpha = 2$*:*

$$z(n) = an^3 + bn^2.$$

Para determinar el valor de a *y* b *se sustituye en la ecuación:*

$$a(n+2)^3 + b(n+2)^2 - 2a(n+1)^3 - 2b(n+1)^2 + an^3 + bn^2 = n+1$$

$$\Rightarrow\; 6an + 6a + 2b = n+1$$

$$\Rightarrow\; \begin{cases} 6a = 1 & \Rightarrow\; a = \frac{1}{6} \\ 6a + 2b = 1 & \Rightarrow\; b = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; z(n) = \frac{n^3}{6}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación completa es:

$$f(n) = c_1 + c_2 n + \frac{n^3}{6}.$$

Ejemplo 9 .- *Hallar la solución general de:*

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = 3^n, \quad \forall n \in Z.$$

La ecuación característica es:

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = r_2 = -1.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n.$$

Una solución particular de la completa será de la forma $z_n = a\,3^n$*. Para determinar el valor de* a *se sustituye en la ecuación:*

$$a\,3^{n+2} + 2a\,3^{n+1} + a\,3^n = 3^n$$
$$\Rightarrow\; (9a + 6a + a)3^n = 3^n$$
$$\Rightarrow\; 16a = 1 \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{16}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación completa es:

$$y_n = c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n + \frac{3^n}{16}.$$

Ejemplo 10 .- *Hallar la solución de:*

$$f(n+1) - 2f(n) = 2^n, \quad \forall n \in Z,$$
$$f(0) = -1.$$

La ecuación característica es:

$$r - 2 = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = 2.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y(n) = c_1 2^n.$$

Una solución particular de la completa será de la forma $z(n) = an2^n$. *Para determinar el valor de a se sustituye en la ecuación:*

$$a(n+1)2^{n+1} - 2an2^n = 2^n$$
$$\Rightarrow\; 2a2^n = 2^n \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow\; z(n) = \frac{1}{2}n2^n = n2^{n-1}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación completa es:

$$f(n) = c_1 2^n + n2^{n-1}.$$

Imponiendo la condición:

$$f(0) = -1 \;\Rightarrow\; c_1 = -1.$$

Así pues, la solución del problema es:

$$f(n) = -2^n + n2^{n-1}.$$

Ejemplo 11 .- *Hallar la solución de:*

$$f(n+1) - 2f(n) = n, \quad \forall n \in Z,$$
$$f(0) = 0.$$

La ecuación característica es:

$$r - 2 = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = 2.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y(n) = c_1 2^n.$$

Una solución particular de la completa será de la forma $z(n) = an + b$. *Para determinar el valor de* a *se sustituye en la ecuación:*

$$a(n+1) + b - 2an - 2b = n$$
$$\Rightarrow\; -an + a - b = n$$
$$\Rightarrow\; \begin{cases} -a = 1 & \Rightarrow\; a = -1 \\ a - b = 0 & \Rightarrow\; b = -1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow\; z(n) = -n - 1.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación completa es:

$$f(n) = c_1 2^n - n - 1.$$

Imponiendo la condición:

$$f(0) = 0 \;\Rightarrow\; c_1 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = 1.$$

Así pues, la solución del problema es:

$$f(n) = 2^n - (n+1).$$

.

REFERENCIAS

Como bibliografía general de apoyo para el curso se recomiendan, entre otras, las siguientes obras clásicas:

- BURDEN, R.L. y FAYRES, J.D. Análisis Numérico Matricial. Ed. Iberoamericana, 1985.
- CHAPRA, S.C. y CANALE, R.P Métodos Numéricos para Ingenieros. McGraw-Hill, 1987.
- CIARLET, P. Introduction a l'Analyse Numérique Matricielle et a l'Optimisation. Masson, 1982.
- DALQUIST, G. y BJORCK, A. Numerical Methods. Prentice Hall, 1974.
- GOURLAY, A.R. y WATSON, G.A. Computational Methods for Matrix Eigenproblems. John Wiley, 1953.
- HAMMERLIN, G. y HOFFMANN, J.D. Numerical Mathematics. Springer Verlag, 1991.
- HENRICI, P. Elementos de Análisis Numérico. Trillas, 1972.
- HOFFMANN, J.D. Numerical Methods for Engineering and Sciences. McGraw-Hill, 1992.

- KELLEY, C.T. Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations. Frontiers in applied mathematics, SIAM, 1995.
- KINCAID, D. y CHENEY, W. Análisis Numérico. Addison Wesley Iberoamericana, 1994.
- LASCAUX, P. y THEODOR, R. Analyse Numérique Matricielle Appliquée a l' Ingenierie. Masson, 1986.
- NOUGIER, J.P. Méthodes de Calcul Numérique. Masson, 1985.
- SCHWARTZ, H.R. Numerical Analysis. A Comprehensive Introduction. John Wiley, 1989.
- THEODOR, R. Initiation a l'Analyse Numérique. Masson, 1986.

INDICE