

Sobre la conjetura de Wright*

Eduardo Liz Marzán

Departamento de Matemática Aplicada II
Universidade de Vigo

Como bien saben los australianos, el crecimiento de una población sin límites impuestos por los depredadores naturales o los recursos limitados lleva a consecuencias poco deseables. La célebre ecuación logística es un modelo poblacional que garantiza que las soluciones convergen a un equilibrio positivo, a veces conocido como la «capacidad de sustento» (*carrying capacity*). En 1948, el ecólogo G. E. Hutchinson (1903–1991) propuso en [1] una versión con retardo de la ecuación logística, que sigue siendo una de las ecuaciones con retardo más populares y ha dado lugar a multitud de generalizaciones. Tras suprimir los parámetros superfluos que no influyen en la dinámica, se puede normalizar el retardo a $\tau = 1$ y escribir la ecuación en la forma

$$P'(t) = rP(t)(1 - P(t - 1)),$$

donde $P(t)$ representa el número de individuos de la población en el instante t y $r > 0$ es un parámetro que recoge la información del retardo y de la tasa de crecimiento de la población. Parece natural restringirse a soluciones positivas, en cuyo caso el único equilibrio es $K = 1$. En el trabajo de Hutchinson ya se establecen, sin demostración, algunas propiedades interesantes, como que las soluciones de esta ecuación oscilan en torno al equilibrio (en realidad, esto ocurre si $r > 1/e$), que están acotadas, y que convergen al equilibrio si r es pequeño. De hecho, se señala el número crítico $\pi/2$, de forma que las oscilaciones tienden a amortiguarse si $0 < r < \pi/2$, pero no es así si $r > \pi/2$.

Los primeros resultados de carácter global sobre la dinámica de la ecuación llegaron en 1955 [6] de la mano de un experto en teoría de números, Sir Edward Maitland Wright (1906–2005). Tratando de ayudar a su amigo, el Vizconde Cherwell (F. A. Lindemann, 1886–1957), a encontrar una demostración alternativa del teorema del número primo, llegó a una formulación equivalente de la ecuación de Hutchinson, que se conoce como ecuación de Wright. Sobre qué pintan aquí los números primos, he escrito un trabajo hace unos años [3].

La ecuación de Wright es la siguiente:

$$x'(t) = -rx(t - 1)(1 + x(t)),$$

con $r > 0$, donde ahora el equilibrio positivo se transforma en $x = 0$ y se debe suponer que $x > -1$. De hecho, ninguna solución $x(t)$ puede cruzar la recta $x = -1$, así que las soluciones que parten con condiciones iniciales $x > -1$ permanecen en ese semiplano, y únicamente consideraremos esas.



E. M. Wright

*Publicado en la sección «Terra incognita» del blog del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Sevilla el 4 de marzo de 2025, <https://institucional.us.es/blogimus/2025/03/sobre-la-conjetura-de-wright/>

En su artículo de 1955, Wright probó algunas propiedades muy interesantes y sus ideas siguieron aplicándose para otras ecuaciones. En particular, sus resultados confirman que el equilibrio es asintóticamente estable si $0 < r < \pi/2$. Pero los resultados más importantes son de carácter global. En particular, probó que para cada $r > \pi/2$ existen soluciones acotadas que no convergen a cero y que todas las soluciones convergen a cero si $r \leq 3/2$. Respecto a este último resultado, escribió una frase que se ha hecho muy célebre:

My methods, at the cost of considerable elaboration, can be used to extend this result to $r \leq 37/24$ and, probably, to $r < 1.567 \dots$ (compare with $\pi/2 = 1.571 \dots$). But the work becomes so heavy for the last step that I have not completed it.

Para situarnos, $37/24 = 1.54166 \dots$. Así que, aunque no está formulada ninguna conjetura, la comunidad matemática se tomó la libertad de llamar «conjetura de Wright» al postulado de que el equilibrio $x = 0$ de la ecuación de Wright es un atractor global siempre que es asintóticamente estable. Para entendernos, que sea atractor global, en este caso, quiere decir que todas las soluciones $x(t)$ que están por encima de -1 convergen a 0 cuando $t \rightarrow \infty$.

Cabe mencionar que la ecuación de Wright tiene muy buenas propiedades (para ser una ecuación con retardo con un espacio de fases de dimensión infinita), entre las que figura un análogo al teorema de Poincaré-Bendixson: todas las soluciones convergen al equilibrio o a una solución periódica no trivial. De hecho, un tipo de soluciones periódicas que juegan un papel muy importante son las SPLOs (soluciones periódicas lentamente oscilantes), que se caracterizan por oscilar de tal modo que la distancia entre dos ceros consecutivos es siempre mayor que 1 (el retardo). Hoy se sabe que para cada $r > \pi/2$ existe una única solución periódica lentamente oscilante, formulación que se conocía como «conjetura de Jones», pero esa es otra historia y debe ser contada en otra ocasión.

Un avance muy significativo fue logrado por Tibor Krisztin y sus colaboradores en un artículo que fue anunciado en 2006 y publicado en 2014 [2], tras ocho años de intentar sin éxito rellenar un pequeño hueco que conduciría a la prueba de la conjetura de Wright. En este artículo se prueba la atracción global para $r \leq 1.5706$ (a menos de dos diezmilésimas del resultado, ya que $\pi/2 = 1.570796 \dots$).

El resultado se obtiene en tres pasos: en primer lugar, probaron que la atracción global del equilibrio es equivalente a que la ecuación no tenga SPLOs; en segundo lugar, proporcionan una prueba analítica de que, para $r < \pi/2$, toda SPLO de la ecuación tiene un máximo mayor que $1 - 2r/\pi$; el tercer paso consiste en probar que, para cada $r \in [1.5, 1.5706]$, el máximo de cada SPLO es menor o igual que $1 - 2r/\pi$. Esta última parte utiliza análisis numérico riguroso asistido por ordenador (aritmética de intervalos).

El hueco fue rellenado por Van den Berg y Jaquette poco más tarde, en 2018 [5]. Su resultado principal establece que la ecuación de Wright no tiene SPLOs para $r \in [1.5706, \pi/2]$. Para ello, realizan un análisis muy fino de las soluciones periódicas que se generan en la bifurcación de Hopf que ocurre en $r = \pi/2$. Es importante destacar que también usan técnicas de cálculo numérico riguroso y que el resultado está ampliamente aceptado por la comunidad de las ecuaciones diferenciales con retardo.

Termino comentando que pertenezco a esta comunidad y, junto a mis colaboradores, hemos contribuido modestamente con algunos resultados de estabilidad global para ecuaciones diferenciales funcionales relacionadas con la ecuación de Wright. Por ejemplo, hemos generalizado el resultado de Wright a una familia más amplia de ecuaciones diferenciales funcionales, mostrando que, en ese contexto, el valor $r = 3/2$ es óptimo [4].

Referencias

- [1] G. E. Hutchinson, Circular causal systems in ecology, *Ann. New York Acad. Sci.* **50** (1948), 221–246.
- [2] B. Bánhelyi, T. Csendes, T. Krisztin y A. Neumaier, Global attractivity of the zero solution for Wright’s equation, *SIAM J. Appl. Dynam. Syst.* **13** (2014), 537–563.
- [3] E. Liz, Sobre ecuaciones diferenciales con retraso, dinámica de poblaciones y números primos, *Materials Matemàtics* (2006), trabajo 17, 24 pp.
- [4] E. Liz, V. Tkachenko y S. Trofimchuk, Yorke and Wright 3/2-stability theorems from a unified point of view, *Discrete Contin. Dynam. Systems*, Supplement Volume (2003), 580–589.
- [5] J. B. van den Berg y J. Jaquette, A proof of Wright’s conjecture, *J. Differential Equations* **264** (2018), 7412–7462.
- [6] E. M. Wright, A non-linear difference-differential equation, *J. Reine Angew. Math.* **194** (1955), 66–87.