Factorizaciones de cuasigrupos de Hopf

Ramón González Rodríguez

CENTRO DE INVESTIGACIÓN E TECNOLOXÍA MATEMÁTICA DE GALICIA

Universida de Vigo

XVI Jornadas de Álgebra No Conmutativa

Granada, 4 y 5 de abril de 2024

GOBIERNO DE ESPAÑA MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN

Ministerio de Ciencia e Innovación. Agencia Estatal de Investigación
Unión Europea – Fondo Europeo de Desarrollo Regional
PID2020-115155GB-I00

Índice

1. El problema de factorización para álgebras de Hopf
2. Cuasigrupos de Hopf
3. Leyes distributivas para cuasigrupos de Hopf
4. Ejemplos de leyes distributivas a-comonoidales
5. Factorización de cuasigrupos de Hopf

El problema de factorización para álgebras de Hopf

1. El problema de factorización para álgebras de Hopf
2. Cuasigrupos de Hopf
3. Leyes distributivas para cuasigrupos de Hopf
4. Ejemplos de leyes distributivas a-comonoidales
5. Factorización de cuasigrupos de Hopf

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y denotemos por $\otimes$ el producto tensor en la categoría $\mathbb{F}$-Vect.

El producto cruzado doble de dos álgebras de Hopf A y H en $\mathbb{F}$-Vect fue introducido por S. Majid en

- **S. Majid**: Physics for algebraist: non-commutative and non-cocommutative Hopf algebras by a bicrossproduct construction, Journal of Algebra 130 (1990), 17-64.

como una nueva estructura de álgebra de Hopf definida en $A \otimes H$ y determinada por un par emparejado (matched pair) (A, H).

Un par emparejado de álgebras de Hopf es un sistema (A, H), donde A y H son álgebras de Hopf, A es un H-módulo coálgebra por la izquierda con acción

$$\varphi_A : H \otimes A \to A, \quad \varphi_A(h \otimes a) = h \triangleright a,$$

H es un A-módulo coálgebra por la derecha con acción

$$\phi_H : H \otimes A \to H, \quad \phi_H(h \otimes a) = h \triangleleft a$$

y además para todos $h, g \in H$ y $a, b \in A$ se tiene que:

$$h \triangleright 1_A = \varepsilon(h)1_A, \quad h \triangleright (ab) = (h_{(1)} \triangleright a_{(1)})((h_{(2)} \triangleleft a_{(2)}) \triangleright b),$$

$$1_H \triangleleft a = \varepsilon(a)1_H, \quad (hg) \triangleleft a = (h \triangleleft (g_{(1)} \triangleright a_{(1)}))(g_{(2)} \triangleleft a_{(2)}),$$

$$h_{(1)} \triangleleft a_{(1)} \otimes h_{(2)} \triangleright a_{(2)} = h_{(2)} \triangleleft a_{(2)} \otimes h_{(1)} \triangleright a_{(1)}.$$

Si (A, H) es un par emparejado de álgebras de Hopf, el producto cruzado doble $A \bowtie H$ de A con H es el álgebra de Hopf construida en $A \otimes H$ con producto

$$(a \otimes h)(b \otimes g) = a(h_{(1)} \triangleright b_{(1)}) \otimes (h_{(2)} \triangleleft b_{(2)})g,$$

unidad el producto tensorial de las unidades, counidad el producto tensorial de las counidades, coproducto tensor y antípoda

$$\lambda_{A \bowtie H}(a \otimes h) = \lambda_H(h_{(2)}) \triangleright \lambda_A(a_{(2)}) \otimes \lambda_H(h_{(1)}) \triangleleft \lambda_A(a_{(1)})$$

donde λ_H es la antípoda de H y λ_A es la antípoda de A.

Un álgebra de Hopf X se factoriza como $X = AH$ si existen subálgebras de Hopf A y H con inclusiones i_A e i_H tal que el la aplicación

$$\omega(a \otimes h) = i_A(a) i_H(h)$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Como demostró Majid, X se factoriza de la forma $X = AH$ si existe un par emparejado de álgebras de Hopf (A, H) tales que X es isomorfo a $A \bowtie H$ como álgebras de Hopf.

El objetivo de esta charla es probar que el resultado anterior también se cumple para los cuasigrupos de Hopf introducidos por J. Klim y S. Majid en:

- **J. Klim y S. Majid**: Hopf quasigroups and the algebraic 7-sphere, J. Algebra 323 (2010), 3067-3110.

Cuasigrupos de Hopf

1. El problema de factorización para álgebras de Hopf
2. Cuasigrupos de Hopf
3. Leyes distributivas para cuasigrupos de Hopf
4. Ejemplos de leyes distributivas a-comonoidales
5. Factorización de cuasigrupos de Hopf

En lo que sigue C denota una categoría monoidal simétrica estricta con producto tensor $\otimes$ y objeto unidad K. Con c denotaremos el isomorfismo natural de simetría.

Es bien conocido que no supone pérdida de generalidad suponer el carácter estricto de C.

Por simplicidad en la notación, dados tres objetos V, U, B y un morfismo

$$f : V \to U$$

en C, escribiremos

$$B \otimes f \text{ para } id_B \otimes f \text{ y } f \otimes B \text{ para } f \otimes id_B.$$

La terna (A, η_A, μ_A) denotará un magma unitario, i.e. $\eta_A : K \to A$ (unidad) y $\mu_A : A \otimes A \to A$ (producto) son morfismos en C tales que

$$\mu_A \circ (A \otimes \eta_A) = id_A = \mu_A \circ (\eta_A \otimes A).$$

Si el producto es asociativo, i.e.,

$$\mu_A \circ (\mu_A \otimes A) = \mu_A \circ (A \otimes \mu_A)$$

tendremos que (A, η_A, μ_A) es un álgebra.

De forma dual la terna $(C, \varepsilon_C, \delta_C)$ denotará un comagma counitario con coproducto $\delta_C : C \to C \otimes C$ y counidad $\varepsilon_C : C \to K$.

$$(\varepsilon_C \otimes C) \circ \delta_C = id_C = (C \otimes \varepsilon_C) \circ \delta_C,$$

Si el coproducto es coasociativo, i.e.,

$$(\delta_C \otimes C) \circ \delta_C = (C \otimes \delta_C) \circ \delta_C,$$

tendremos que $(C, \varepsilon_C, \delta_C)$ es una coálgebra.

Si $f, g : C \to A$ son morfismos, $f * g$ denota el producto dado por la convolución:

$$f * g = \mu_A \circ (f \otimes g) \circ \delta_C.$$

Definición

Una biálgebra no asociativa en C es un magma unitario (H, η_H, μ_H) con estructura de coálgebra $(H, \varepsilon_H, \delta_H)$ tal que ε_H y δ_H son morfismos de magmas unitarios (equivalentemente, η_H y μ_H son morfismos de coálgebras). Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

$$\varepsilon_H \circ \eta_H = id_K, \quad \varepsilon_H \circ \mu_H = \varepsilon_H \otimes \varepsilon_H,$$

$$\delta_H \circ \eta_H = \eta_H \otimes \eta_H, \quad \delta_H \circ \mu_H = (\mu_H \otimes \mu_H) \circ \delta_{H\otimes H},$$

donde $\delta_{H\otimes H} = (H \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H)$.

Definición

Un morfismo $f : H \to B$ entre biálgebras no asociativas H y B es un morfismo de magmas unitarios y de coálgebras, i.e.,

$$f \circ \eta_H = \eta_B, \quad \mu_B \circ (f \otimes f) = f \circ \mu_H,$$

$$\varepsilon_B \circ f = \varepsilon_H, \quad (f \otimes f) \circ \delta_H = \delta_B \circ f.$$

Definición

Un cuasigrupo de Hopf H en C es una biálgebra no asociativa tal que existe un morfismo

$$\lambda_H : H \to H$$

en C (llamado la antípoda de H) tal que:

$$\mu_H \circ (\lambda_H \otimes \mu_H) \circ (\delta_H \otimes H) = \varepsilon_H \otimes H = \mu_H \circ (H \otimes \mu_H) \circ (H \otimes \lambda_H \otimes H) \circ (\delta_H \otimes H).$$

$$\mu_H \circ (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \lambda_H \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H) = H \otimes \varepsilon_H = \mu_H \circ (\mu_H \otimes \lambda_H) \circ (H \otimes \delta_H).$$

Un morfismo de cuasigrupos de Hopf $f : H \to B$ es un morfismo de biálgebras no asociativas. Entonces se puede probar que:

$$\lambda_B \circ f = f \circ \lambda_H.$$

Si H es un cuasigrupo de Hopf en C, la antípoda λ_H es única, antimultiplicativa, anticomultiplicativa, y deja la unidad y la counidad invariantes, i.e.,

$$\lambda_H \circ \mu_H = \mu_H \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H) \circ c_{H,H}, \quad \delta_H \circ \lambda_H = c_{H,H} \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H,$$

$$\lambda_H \circ \eta_H = \eta_H, \quad \varepsilon_H \circ \lambda_H = \varepsilon_H.$$

También, si H es un cuasigrupo de Hopf tenemos que

$$\lambda_H * id_H = \eta_H \otimes \varepsilon_H = id_H * \lambda_H.$$

Un cuasigrupo de Hopf es asociativo si y sólo si es un álgebra de Hopf.

Definición

Sea H un magma unitario. Diremos que un morfismo $\phi : H \otimes H \to H \otimes H$ es:

- H-cuasilineal por la izquierda, si $\phi = (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \phi) \circ (H \otimes \eta_H \otimes H)$.
- H-cuasilineal por la derecha, si $\phi = (H \otimes \mu_H) \circ (\phi \otimes H) \circ (H \otimes \eta_H \otimes H)$.

De forma dual, si H es un comagma counitario, diremos que un morfismo

$$\phi : H \otimes H \to H \otimes H$$

es H-cuasicolineal por la izquierda

$$\phi = (H \otimes \varepsilon_H \otimes H) \circ (H \otimes \phi) \circ (\delta_H \otimes H)$$

y H-cuasicolineal por la derecha si

$$\phi = (H \otimes \varepsilon_H \otimes H) \circ (\phi \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H)$$

.

Teorema

Sea H un magma unitario y un comagma counitario. Entonces.

(i) El morfismo de fusión por la derecha (morfismo de Galois por la derecha), definido como
$$\beta = (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H),$$
es H-cuasilineal por la izquierda y H-cuasicolineal por la derecha.

(ii) El morfismo de fusión por la izquierda (morfismo de Galois por la izquierda), definido como
$$\gamma = (H \otimes \mu_H) \circ (\delta_H \otimes H),$$
es H-cuasilineal por la derecha y H-cuasicolineal por la izquierda.

Teorema

Sea H una biálgebra no asociativa. Entonces H es un cuasigrupo de Hopf si y sólo si los morfismos de fusión por la izquierda y por la derecha β y γ son isomorfismos y β^{-1} es H-cuasilineal por la izquierda y γ^{-1} es H-cuasilineal por la derecha.

Ejemplo

Un cuasigrupo es un conjunto Q para el cual existe un producto $\star$ tal que para todos $u, v \in Q$ las ecuaciones

$$u \star x = v, \quad x \star u = v, \quad u \star v = x$$

tiene solución única en Q.
Un cuasigrupo L conteniendo un elemento e_L tal que

$$u \star e_L = u = e_L \star u$$

para todo $u \in L$ se llamará un lazo (loop). Un lazo L se dice que tiene inversos (I.P. loop) si para todo elemento $u \in L$, existe un elemento $u^{-1} \in L$ tal que

$$u^{-1} \star (u \star v) = v = (v \star u) \star u^{-1}$$

para todo $v \in L$.
Si L es un lazo con inversos, se tiene que, para todo $u \in L$, u^{-1} is único y $u^{-1} \star u = e_L = u \star u^{-1}$. Además, para todos $u, v \in L$, $(u \star v)^{-1} = v^{-1} \star u^{-1}$.

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos afirmar que en Set los cuasigrupos de Hopf son los lazos con inversos.

Ejemplo

Sea R un anillo conmutativo y sea L un lazo con inversos. Entonces,

$$R[L] = \bigoplus_{u \in L} Ru$$

es un cuasigrupo de Hopf con el producto dado por la extensión lineal del producto definido en L y

$$\delta_{R[L]}(u) = u \otimes u, \;\; \varepsilon_{R[L]}(u) = 1_R, \;\; \lambda_{R[L]}(u) = u^{-1}.$$

En este caso, $\lambda_{R[L]}$ es un isomorfismo ya que $\lambda_{R[L]} \circ \lambda_{R[L]} = id_{R[L]}$. Es más, $R[L]$ es coconmutativo.

Ejemplo

El álgebra envolvente $U(M)$ de un álgebra de Malcev M sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ con característica distinta de 2 y 3, introducida en

> **J.M. Pérez-Izquierdo e I.P. Shestakov**, An envelope for Malcev algebras, Journal of Algebra 272 (2004), 379-393.

es un ejemplo de cuasigrupo de Hopf coconmutativo.

Leyes distributivas para cuasigrupos de Hopf

1. El problema de factorización para álgebras de Hopf
2. Cuasigrupos de Hopf
3. **Leyes distributivas para cuasigrupos de Hopf**
4. Ejemplos de leyes distributivas a-comonoidales
5. Factorización de cuasigrupos de Hopf

Definición

Sean H y A cuasigrupos de Hopf. Se dice que un morfismo

$$\Psi : H \otimes A \to A \otimes H$$

es una ley distributiva de H sobre A si se cumple lo siguiente:

- $\Psi \circ (H \otimes \mu_A) \circ (\lambda_H \otimes \lambda_A \otimes A) = (\mu_A \otimes H) \circ (A \otimes \Psi) \circ (\Psi \otimes A) \circ (\lambda_H \otimes \lambda_A \otimes A)$,
- $\Psi \circ (\mu_H \otimes A) \circ (H \otimes \lambda_H \otimes \lambda_A) = (A \otimes \mu_H) \circ (\Psi \otimes H) \circ (H \otimes \Psi) \circ (H \otimes \lambda_H \otimes \lambda_A)$,
- $\Psi \circ (H \otimes \eta_A) = \eta_A \otimes H$,
- $\Psi \circ (\eta_H \otimes A) = A \otimes \eta_H$

Si las antípodas de A y H son isomorfismos podemos suprimirlas de las dos primeras identidades y entonces tendríamos la misma axiomática que en el caso de leyes distributivas entre álgebras con la diferencia de que A y H son magmas unitarios.

Definición

Sean H y A cuasigrupos de Hopf y sea $\Psi : H \otimes A \to A \otimes H$ una ley distributiva de H sobre A. Diremos que Ψ es comonoidal si es un morfismo de coálgebras, i.e.:

- $\delta_{A\otimes H} \circ \Psi = (\Psi \otimes \Psi) \circ \delta_{H\otimes A}$,
- $(\varepsilon_A \otimes \varepsilon_H) \circ \Psi = \varepsilon_H \otimes \varepsilon_A$.

Definición

Sea H, A cuasigrupos de Hopf y sea $\Psi : H\otimes A \to A\otimes H$ una ley distributiva comonoidal de H sobre A. Diremos que Ψ es a-comonoidal si

- $(A \otimes \mu_H) \circ (\Psi \otimes \mu_H) \circ (H \otimes \Psi \otimes H) \circ (((\lambda_H \otimes H) \circ \delta_H) \otimes A \otimes H) = \varepsilon_H \otimes A \otimes H$,
- $(A \otimes \mu_H) \circ (\Psi \otimes \mu_H) \circ (H \otimes \Psi \otimes H) \circ (((H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H) \otimes A \otimes H) = \varepsilon_H \otimes A \otimes H$,
- $(\mu_A \otimes H) \circ (\mu_A \otimes \Psi) \circ (A \otimes \Psi \otimes A) \circ (A \otimes H \otimes ((\lambda_A \otimes A) \circ \delta_A)) = A \otimes H \otimes \varepsilon_A$,
- $(\mu_A \otimes H) \circ (\mu_A \otimes \Psi) \circ (A \otimes \Psi \otimes A) \circ (A \otimes H \otimes ((A \otimes \lambda_A) \circ \delta_A)) = A \otimes H \otimes \varepsilon_A$.

Si los productos de H y A fuesen asociativos las cuatro igualdades anteriores se cumplen trivialmente.

Teorema

Sean H y A cuasigrupos de Hopf y sea $\Psi : H \otimes A \to A \otimes H$ una ley distributiva a-comonoidal de H sobre A. Entonces

$$A \otimes_\Psi H = (A \otimes H, \eta_{A\otimes_\Psi H}, \mu_{A\otimes_\Psi H}, \varepsilon_{A\otimes_\Psi H}, \delta_{A\otimes_\Psi H}, \lambda_{A\otimes_\Psi H})$$

donde

$$\eta_{A\otimes_\Psi H} = \eta_A \otimes \eta_H, \quad \varepsilon_{A\otimes_\Psi H} = \varepsilon_A \otimes \varepsilon_H,$$

$$\mu_{A\otimes_\Psi H} = (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (A \otimes \Psi \otimes H), \quad \delta_{A\otimes_\Psi H} = \delta_{A\otimes H}$$

y

$$\lambda_{A\otimes_\Psi H} = \Psi \circ (\lambda_H \otimes \lambda_A) \circ c_{A,H}$$

es un cuasigrupo de Hopf.

Teorema

Sean H y A cuasigrupos de Hopf y supongamos que

$$A \odot H = (A \otimes H, \eta_{A\odot H} = \eta_{A\otimes H}, \mu_{A\odot H}, \varepsilon_{A\odot H} = \varepsilon_{A\otimes H}, \delta_{A\odot H} = \delta_{A\otimes H}, \lambda_{A\odot H})$$

también es un cuasigrupo de Hopf.
Si se cumple que

- $\mu_{A\odot H} = (\mu_A \otimes H) \circ (A \otimes (\mu_{A\odot H} \circ (\eta_A \otimes H \otimes A \otimes H)))$,
- $\mu_{A\odot H} = (A \otimes \mu_H) \circ ((\mu_{A\odot H} \circ (A \otimes H \otimes A \otimes \eta_H)) \otimes H)$,
- $\mu_{A\odot H} \circ ((\mu_{A\odot H} \circ (\eta_A \otimes \lambda_H \otimes \lambda_A \otimes \eta_H)) \otimes A \otimes \eta_H) = \mu_{A\odot H} \circ (\eta_A \otimes \lambda_H \otimes (\mu_{A\odot H} \circ (\lambda_A \otimes \eta_H \otimes A \otimes \eta_H))$,
- $\mu_{A\odot H} \circ (\eta_A \otimes H \otimes \mu_{A\odot H} \circ (\eta_A \otimes \lambda_H \otimes \lambda_A \otimes \eta_H)) = \mu_{A\odot H} \circ (\mu_{A\odot H} \circ (\eta_A \otimes H \otimes \eta_A \otimes \lambda_H)) \otimes \lambda_A \otimes \eta_H)$,
- $\mu_{A\odot H} \circ (\eta_A \otimes \lambda_H \otimes (\mu_{A\odot H} \circ (\eta_A \otimes H \otimes A \otimes H))) \circ (\delta_H \otimes A \otimes H)$
  $= \mu_{A\odot H} \circ ((\mu_{A\odot H} \circ (\eta_A \otimes ((\lambda_H \otimes \eta_A \otimes H) \circ \delta_H))) \otimes A \otimes H)$,
- $\mu_{A\odot H} \circ (\eta_A \otimes (\mu_{A\odot H} \circ (\eta_A \otimes \lambda_H \otimes A \otimes H))) \circ (\delta_H \otimes A \otimes H)$
  $= \mu_{A\odot H} \circ ((\mu_{A\odot H} \circ (\eta_A \otimes ((H \otimes \eta_A \otimes \lambda_H) \circ \delta_H))) \otimes A \otimes H)$,
- $\mu_{A\odot H} \circ ((\mu_{A\odot H} \circ (A \otimes H \otimes \lambda_A \otimes \eta_H)) \otimes A \otimes \eta_H) \circ (A \otimes H \otimes \delta_A)$
  $= \mu_{A\odot H} \circ (A \otimes H \otimes (\mu_{A\odot H} \circ (((\lambda_A \otimes \eta_H \otimes A) \circ \delta_A) \otimes H)))$,
- $\mu_{A\odot H} \circ ((\mu_{A\odot H} \circ (A \otimes H \otimes A \otimes \eta_H)) \otimes \lambda_A \otimes \eta_H) \circ (A \otimes H \otimes \delta_A)$
  $= \mu_{A\odot H} \circ (A \otimes H \otimes (\mu_{A\odot H} \circ (((A \otimes \eta_H \otimes \lambda_A) \circ \delta_A) \otimes \eta_H)))$,

el morfismo $\Gamma = \mu_{A\odot H} \circ (\eta_A \otimes H \otimes A \otimes \eta_H)$ es una ley distributiva a-comonoidal y además

$$A \odot H = A \otimes_\Gamma H$$

como cuasigrupos de Hopf.

Ejemplos de leyes distributivas a-comonoidales

1. El problema de factorización para álgebras de Hopf
2. Cuasigrupos de Hopf
3. Leyes distributivas para cuasigrupos de Hopf
4. Ejemplos de leyes distributivas a-comonoidales
5. Factorización de cuasigrupos de Hopf

En la primera parte de la sección veremos que la teoría de productos cruzados dobles introducida en

> **J.N. Alonso Álvarez, J.M. Fernández Vilaboa y R. González Rodríguez**: Multiplication alteration by two-cocycles. The nonassociative version, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 43 (2020), 3557-3615.

produce ejemplos de leyes distributivas a-comonoidales entre cuasigrupos de Hopf.

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf. Se dice (M, φ_M) es un H-cuasimódulo por la izquierda si M es un objeto en C y $\varphi_M : H \otimes M \to M$ es un morfismo en C satisfaciendo:

- $\varphi_M \circ (\eta_H \otimes M) = id_M$,
- $\varphi_M \circ (H \otimes \varphi_M) \circ (((H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H) \otimes M) = \varepsilon_H \otimes M = \varphi_M \circ (\lambda_H \otimes \varphi_M) \circ (\delta_H \otimes M)$.

Si reemplazamos la última condición por

- $\varphi_M \circ (H \otimes \varphi_M) = \varphi_M \circ (\mu_H \otimes M)$,

tendremos la noción de H-módulo por la izquierda.

Definición

Diremos que un magma unitario A es un H-cuasimódulo magma por la izquierda si es un H-cuasimódulo por la izquierda con acción $\varphi_A : H \otimes A \to A$ y además:

- $\varphi_A \circ (H \otimes \eta_A) = \varepsilon_H \otimes \eta_A$,
- $\mu_A \circ \varphi_{A\otimes A} = \varphi_A \circ (H \otimes \mu_A)$

donde $\varphi_{A\otimes A} = (\varphi_A \otimes \varphi_A) \circ (H \otimes c_{H,A} \otimes A) \circ (\delta_H \otimes A \otimes A)$.

Definición

Diremos que una coálgebra A es un H-cuasimódulo coálgebra si es un H-cuasimódulo por la izquierda con acción $\varphi_A : H \otimes A \to A$ y además:

- $\varepsilon_A \circ \varphi_A = \varepsilon_H \otimes \varepsilon_A$,
- $\delta_A \circ \varphi_A = \varphi_{A\otimes A} \circ (H \otimes \delta_A)$.

Si en las dos definiciones anteriores cambiamos H-cuasimódulo por H-módulo, tendremos las nociones de H-módulo magma por la izquierda y de H-módulo coálgebra por la izquierda.
Similarmente, podemos definir las nociones por la derecha.

Teorema

Si A y H son cuasigrupos de Hopf, (A, φ_A) es un H-módulo coálgebra por la izquierda, (H, ϕ_H) es un H-módulo coálgebra por la derecha y

$$\Psi = (\varphi_A \otimes \phi_H) \circ \delta_{H\otimes A},$$

las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) El doble producto cruzado $A \bowtie H = (A \otimes H, \eta_{A\bowtie H}, \mu_{A\bowtie H}, \varepsilon_{A\bowtie H}, \delta_{A\bowtie H}, \lambda_{A\bowtie H})$ donde

$$\eta_{A\bowtie H} = \eta_A \otimes \eta_H, \quad \varepsilon_{A\bowtie H} = \varepsilon_A \otimes \varepsilon_H, \quad \delta_{A\bowtie H} = \delta_{A\otimes H},$$

$$\mu_{A\bowtie H} = (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (A \otimes \Psi \otimes H), \quad \lambda_{A\bowtie H} = \Psi \circ (\lambda_H \otimes \lambda_A) \circ c_{A,H}$$

es un cuasigrupo de Hopf.

(ii) Se tienen las igualdades:

- $\varphi_A \circ (H \otimes \eta_A) = \varepsilon_H \otimes \eta_A, \ \ \phi_H \circ (\eta_H \otimes A) = \eta_H \otimes \varepsilon_A,$
- $(\phi_H \otimes \varphi_A) \circ \delta_{H\otimes A} = c_{A,H} \circ \Psi,$
- $\varphi_A \circ (H \otimes \mu_A) \circ (\lambda_H \otimes \lambda_A \otimes A) = \mu_A \circ (A \otimes \varphi_A) \circ ((\Psi \circ (\lambda_H \otimes \lambda_A)) \otimes A),$
- $\mu_H \circ (\phi_H \otimes \mu_H) \circ (\lambda_H \otimes \Psi \otimes H) \circ (\delta_H \otimes A \otimes H) = \varepsilon_H \otimes \varepsilon_A \otimes H, ,$
- $\mu_H \circ (\phi_H \otimes \mu_H) \circ (H \otimes \Psi \otimes H) \circ (((H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H) \otimes A \otimes H) = \varepsilon_H \otimes \varepsilon_A \otimes H,$
- $\phi_H \circ (\mu_H \otimes A) \circ (H \otimes \lambda_H \otimes \lambda_A) = \mu_H \circ (\phi_H \otimes H) \circ (H \otimes (\Psi \circ (\lambda_H \otimes \lambda_A))),$
- $\mu_A \circ (\mu_A \otimes \varphi_A) \circ (A \otimes \Psi \otimes \lambda_A) \circ (A \otimes H \otimes \delta_A) = A \otimes \varepsilon_H \otimes \varepsilon_A,$
- $\mu_A \circ (\mu_A \otimes \varphi_A) \circ (A \otimes \Psi \otimes A) \circ (A \otimes H \otimes ((\lambda_A \otimes A) \circ \delta_A)) = A \otimes \varepsilon_H \otimes \varepsilon_A.$

En las condiciones del apartado (ii) del teorema anterior se puede probar que

$$\Psi = (\varphi_A \otimes \phi_H) \circ \delta_{H \otimes A}$$

es un ejemplo de ley distributiva a-comonoidal.

Definición

Si se tienen las condiciones del apartado (ii) del teorema anterior, diremos que (A, H) es un par emparejado de cuasigrupos de Hopf.

Definición

Sean A y H cuasigrupos de Hopf. Un par torcido (skew pairing) entre A y H sobre K es un morfismo $\tau : A \otimes H \to K$ satisfaciendo lo siguiente:

- $\tau \circ (\mu_A \otimes H) = (\tau \otimes \tau) \circ (A \otimes c_{A,H} \otimes H) \circ (A \otimes A \otimes \delta_H)$
- $\tau \circ (A \otimes \mu_H) = (\tau \otimes \tau) \circ (A \otimes c_{A,H} \otimes H) \circ ((c_{A,A} \circ \delta_A) \otimes H \otimes H)$,
- $\tau \circ (A \otimes \eta_H) = \varepsilon_A$,
- $\tau \circ (\eta_A \otimes H) = \varepsilon_H$.

Si $\tau : A \otimes H \to K$ es un par torcido, se puede probar que τ es inversible para la convolución y $\tau^{-1} = \tau \circ (\lambda_A \otimes H)$. Además $\tau = \tau^{-1} \circ (A \otimes \lambda_H)$ y

- $\tau^{-1} \circ (A \otimes \mu_H) = (\tau^{-1} \otimes \tau^{-1}) \circ (A \otimes c_{A,H} \otimes H) \circ (\delta_A \otimes H \otimes H)$
- $\tau^{-1} \circ (\mu_A \otimes H) = (\tau^{-1} \otimes \tau^{-1}) \circ (A \otimes c_{A,H} \otimes H) \circ (A \otimes A \otimes (c_{H,H} \circ \delta_H))$
- $\tau^{-1} \circ (A \otimes \eta_H) = \varepsilon_A$,
- $\tau^{-1} \circ (\eta_A \otimes H) = \varepsilon_H$.

En el artículo

- **X. Fang y B. Torrecillas**: Twisted smash products and L-R smash products for biquasimodule Hopf quasigroups, Comm. Algebra 42 (2014), 4204-4234.

podemos encontrar el siguiente teorema:

Teorema

Sean A y H cuasigrupos de Hopf y sea $\tau : A \otimes H \to K$ un par torcido. Se tiene que

$$A \bowtie_{\tau} H = (A \otimes H, \eta_{A\bowtie_{\tau} H}, \mu_{A\bowtie_{\tau} H}, \varepsilon_{A\bowtie_{\tau} H}, \delta_{A\bowtie_{\tau} H}, \lambda_{A\bowtie_{\tau} H})$$

es un cuasigrupo de Hopf donde:

$$\eta_{A\bowtie_{\tau} H} = \eta_A \otimes \eta_H, \quad \varepsilon_{A\bowtie_{\tau} H} = \varepsilon_A \otimes \varepsilon_H, \quad \delta_{A\bowtie_{\tau} H} = \delta_{A\otimes H},$$

$$\mu_{A\bowtie_{\tau} H} = (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (A \otimes \Psi \otimes H), \quad \lambda_{A\bowtie_{\tau} H} = \Psi \circ (\lambda_H \otimes \lambda_A) \circ c_{A,H}$$

siendo

$$\Psi = (\tau \otimes A \otimes H \otimes \tau^{-1}) \circ (A \otimes H \otimes \delta_{A\otimes H}) \circ \delta_{A\otimes H} \circ c_{A,A}.$$

Teorema

Sean A y H cuasigrupos de Hopf y sea $\tau : A \otimes H \to K$ un par torcido. Si definimos

$$\varphi_A = (\tau \otimes A \otimes \tau^{-1}) \circ (A \otimes H \otimes \delta_A \otimes H) \circ \delta_{A \otimes H} \circ c_{H,A}$$

y

$$\phi_H = (\tau \otimes H \otimes \tau^{-1}) \circ (A \otimes H \otimes c_{A,H} \otimes H) \circ (A \otimes H \otimes A \otimes \delta_H) \circ \delta_{A \otimes H} \circ c_{H,A},$$

se tiene que (A, H) un par emparejado y que

$$\Psi = (\varphi_A \otimes \phi_H) \circ \delta_{H \otimes A}$$

es una ley distributiva a-comonoidal.
Por lo tanto, $A \bowtie_\tau H$ es un doble producto cruzado asociado a un par emparejado (A, H).

Ejemplo

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo de característica distinta de 2. Consideremos el grupo no abeliano $S_3 = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$, donde σ_0 es el neutro, $o(\sigma_1) = o(\sigma_2) = o(\sigma_3) = 2$ and $o(\sigma_4) = o(\sigma_5) = 3$. Sea u un elemento adicional tal que $u^2 = 1$. El conjunto

$$M(S_3, 2) = \{\sigma_i u^\alpha \ ; \ \alpha = 0, 1\}$$

es un lazo con inversos y producto dado por

$$\sigma_i u^\alpha \bullet \sigma_j u^\beta = (\sigma_i^\nu \sigma_j^\mu)^\nu u^{\alpha+\beta}, \ \ \nu = (-1)^\beta, \ \mu = (-1)^{\alpha+\beta}.$$

Entonces, $A = \mathbb{F}[M(S_3, 2)]$ es un cuasigrupo de Hopf coconmutativo.

Sea H_4 el álgebra de Hopf 4-dimensional de Taft. La base de H_4 es $\{1, x, y, w = xy\}$ y la tabla del producto está dada por:

	x	y	w
x	1	w	y
y	$-w$	0	0
w	$-y$	0	0

La coestructura de H_4 es

$$\delta_{H_4}(x) = x \otimes x,\ \delta_{H_4}(y) = y \otimes x + 1 \otimes y,\ \delta_{H_4}(w) = w \otimes 1 + x \otimes w,$$

$$\varepsilon_{H_4}(x) = 1_{\mathbb{F}},\ \varepsilon_{H_4}(y) = \varepsilon_{H_4}(w) = 0$$

Para la antípoda λ_{H_4} se tiene que:

$$\lambda_{H_4}(x) = x,\ \lambda_{H_4}(y) = w,\ \lambda_{H_4}(w) = -y.$$

El morfismo $\tau : A \otimes H_4 \to \mathbb{F}$ definido por

$$\tau(\sigma_i u^\alpha \otimes z) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad z = 1 \\ (-1)^\alpha & \text{if} \quad z = x \\ 0 & \text{if} \quad z = y, w \end{cases}$$

es un par torcido. Entonces, $A \bowtie_\tau H_4$ es un cuasigrupo de Hopf definido por una la ley distributiva a-comonoidal Ψ de A sobre H_4 dada por

$$\Psi(1 \otimes \sigma_i u^\alpha) = \sigma_i u^\alpha \otimes 1, \;\; \Psi(x \otimes \sigma_i u^\alpha) = \sigma_i u^\alpha \otimes x,$$

$$\Psi(y \otimes \sigma_i u^\alpha) = (-1)^\alpha \sigma_i u^\alpha \otimes y, \;\; \Psi(w \otimes \sigma_i u^\alpha) = (-1)^\alpha \sigma_i u^\alpha \otimes w,$$

asociada a un par emparejado (A, H_4).

Más concretamente,

$$\varphi_A(1 \otimes \sigma_i u^\alpha) = \sigma_i u^\alpha, \;\; \varphi_A(x \otimes \sigma_i u^\alpha) = \sigma_i u^\alpha, \;\; \varphi_A(y \otimes \sigma_i u^\alpha) = \varphi_A(w \otimes \sigma_i u^\alpha) = 0,$$

y

$$\phi_{H_4}(1 \otimes \sigma_i u^\alpha) = 1, \;\; \phi_{H_4}(x \otimes \sigma_i u^\alpha) = x, \;\; \phi_{H_4}(y \otimes \sigma_i u^\alpha) = (-1)^\alpha y,$$
$$\phi_{H_4}(w \otimes \sigma_i u^\alpha) = (-1)^\alpha w.$$

La tabla del producto de $A \bowtie_{\tau} H_4$ es

	$\sigma_j u^{\beta} \otimes 1$	$\sigma_j u^{\beta} \otimes x$
$\sigma_j u^{\alpha} \otimes 1$	$\sigma_i u^{\alpha} \bullet \sigma_j u^{\beta} \otimes 1$	$\sigma_i u^{\alpha} \bullet \sigma_j u^{\beta} \otimes x$
$\sigma_j u^{\alpha} \otimes x$	$\sigma_i u^{\alpha} \bullet \sigma_j u^{\beta} \otimes x$	$\sigma_i u^{\alpha} \bullet \sigma_j u^{\beta} \otimes 1$
$\sigma_j u^{\alpha} \otimes y$	$(-1)^{\beta}\sigma_i u^{\alpha} \bullet \sigma_j u^{\beta} \otimes y$	$(-1)^{\beta+1}\sigma_i u^{\alpha} \bullet \sigma_j u^{\beta} \otimes w$
$\sigma_j u^{\alpha} \otimes w$	$(-1)^{\beta}\sigma_i u^{\alpha} \bullet \sigma_j u^{\beta} \otimes w$	$(-1)^{\beta+1}\sigma_i u^{\alpha} \bullet \sigma_j u^{\beta} \otimes y$

	$\sigma_j u^{\beta} \otimes y$	$\sigma_j u^{\beta} \otimes w$
$\sigma_j u^{\alpha} \otimes 1$	$\sigma_i u^{\alpha} \bullet \sigma_j u^{\beta} \otimes y$	$\sigma_i u^{\alpha} \bullet \sigma_j u^{\beta} \otimes w$
$\sigma_j u^{\alpha} \otimes x$	$\sigma_i u^{\alpha} \bullet \sigma_j u^{\beta} \otimes w$	$\sigma_i u^{\alpha} \bullet \sigma_j u^{\beta} \otimes y$
$\sigma_j u^{\alpha} \otimes y$	0	0
$\sigma_j u^{\alpha} \otimes w$	0	0

La antípoda está dada por:

$$\lambda_{A\bowtie H_{\mathbf{4}}}(\sigma_i u^{\alpha}\otimes 1)=\sigma_i^{(-\mathbf{1})^{\alpha+\mathbf{1}}}u^{\alpha}\otimes 1,$$

$$\lambda_{A\bowtie H_{\mathbf{4}}}(\sigma_i u^{\alpha}\otimes x)=\sigma_i^{(-\mathbf{1})^{\alpha+\mathbf{1}}}u^{\alpha}\otimes x,$$

$$\lambda_{A\bowtie H_{\mathbf{4}}}(\sigma_i u^{\alpha}\otimes y)=(-1)^{\alpha}\sigma_i^{(-\mathbf{1})^{\alpha+\mathbf{1}}}u^{\alpha}\otimes w,$$

$$\lambda_{A\bowtie H_{\mathbf{4}}}(\sigma_i u^{\alpha}\otimes x)=(-1)^{\alpha+\mathbf{1}}\sigma_i^{(-\mathbf{1})^{\alpha+\mathbf{1}}}u^{\alpha}\otimes y.$$

Teorema

$\mathbb{F}[M(S_3,2)]\bowtie H_4$ es un cuasigrupo de Hopf no conmutativo ni coconmutativo.

Más ejemplos

- **T. Brzeziński T. y Z. M. Jiao**: R-smash products of Hopf quasigroups, Arab. J. Math., 1 (2012), 39-46.
- **T. Brzeziński T. y Z. M. Jiao**: Actions of Hopf quasigroups, Comm. Algebra, 40 (2012), 681-696.
- **X. Fang y S. H. Wang**: Twisted smash products for Hopf quasigroups, J. Southeast Univ., 27 (2011), 343-346.

Ejemplo

Sean A y H cuasigrupos de Hopf y asumamos que existe una acción

$$\varphi_A : H \otimes A \to A$$

tal que (A, φ_A) es un H-cuasimódulo magma-coálgebra por la izquierda tal que:

- $(H \otimes \varphi_A) \circ ((c_{H,H} \circ \delta_H) \otimes A) = (H \otimes \varphi_A) \circ (\delta_H \otimes A)$,
- $\varphi_A \circ (H \otimes (\varphi_A \circ (\lambda_H \otimes A))) = \varphi_A \circ ((\mu_H \circ (H \otimes \lambda_H)) \otimes A)$.

Entonces $\Psi : H \otimes A \to A \otimes H$ definido por

$$\Psi = (\varphi_A \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,A}) \circ (\delta_H \otimes A).$$

es un ejemplo de ley distributiva a-comonoidal.

Ejemplo

Sean A y H cuasigrupos de Hopf y asumamos que existen acciones

$$\varphi_A, \varphi'_A : H \otimes A \to A$$

tal que (A, φ_A), (A, φ'_A) son H-cuasimódulos magma-coálgebra por la izquierda tales que cumplen las dos condiciones del ejemplo anterior y además

$$\varphi'_A \circ (H \otimes \varphi_A) = \varphi_A \circ (H \otimes \varphi'_A) \circ (c_{H,H} \otimes A).$$

Entonces $\Psi : H \otimes A \to A \otimes H$ definido por

$$\Psi = (\varphi_A \otimes H) \circ (H \otimes T) \circ (\delta_H \otimes A)$$

donde

$$T = (\varphi'_A \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,A}) \circ (\delta_H \otimes A)$$

es un ejemplo de ley distributiva a-comonoidal.

Factorización de cuasigrupos de Hopf

1. El problema de factorización para álgebras de Hopf
2. Cuasigrupos de Hopf
3. Leyes distributivas para cuasigrupos de Hopf
4. Ejemplos de leyes distributivas a-comonoidales
5. Factorización de cuasigrupos de Hopf

Factorizaciones de cuasigrupos de Hopf

Definición

Sea X un cuasigrupo de Hopf en C. Sean H y A subcuasigrupos de Hopf de X con morfismos de inclusión $i_H : H \to X$, $i_A : A \to X$ respectivamente. Sean ω_X y θ_X morfismos definidos por

$$\omega_X = \mu_X \circ (i_A \otimes i_H) : A \otimes H \to X, \quad \theta_X = \mu_X \circ (i_H \otimes i_A) : H \otimes A \to X.$$

Diremos que X se factoriza como $X = AH$ si ω_X es un isomorfismo y se tiene que:

- $\mu_X \circ (\omega_X \otimes X) = \mu_X \circ (i_A \otimes (\mu_X \circ (i_H \otimes X)))$,
- $\mu_X \circ (X \otimes \omega_X) = \mu_X \circ ((\mu_X \circ (X \otimes i_A)) \otimes i_H)$,
- $\mu_X \circ ((\theta_X \circ (\lambda_H \otimes \lambda_A)) \otimes X) = \mu_X \circ ((i_H \circ \lambda_H) \otimes (\mu_X \circ ((i_A \circ \lambda_A) \otimes X)))$,
- $\mu_X \circ (X \otimes (\theta_X \circ (\lambda_H \otimes \lambda_A))) = \mu_X \circ ((\mu_X \circ (X \otimes (i_H \circ \lambda_H)) \otimes (i_A \circ \lambda_A))$.

Definición

Si las antípodas de A y H fuesen isomorfismos podrían suprimirse en las igualdades tercera y cuarta de la definición anterior.

Ejemplo

Supongamos que (A, H) es un par emparejado de cuasigrupos de Hopf. Entonces el doble producto cruzado $A \bowtie H$ es un cuasigrupo de Hopf. Los morfismos inclusión son

$$i_A = A \otimes \eta_H : A \to A \bowtie H, \quad i_H = \eta_A \otimes H : H \to A \bowtie H.$$

Además

$$\omega_{A \bowtie H} = id_{A \otimes H}, \quad \theta_{A \bowtie H} = \Psi$$

y $A \bowtie H = AH$.

Teorema

Sean H y A subcuasigrupos de Hopf de de un cuasigrupo de Hopf X con morfismos de inclusión $i_H : H \to X$, $i_A : A \to X$ respectivamente. If X se factoriza como $X = AH$, el morfismo

$$\Psi = \omega_X^{-1} \circ \theta_X : H \otimes A \to A \otimes H$$

es una ley distributiva comonoidal de H sobre A. Además, si las antípodas de H y A son isomorfismos, Ψ es una ley distributiva a-comonoidal de H sobre A.

Sean B un cuasigrupo de Hopf. Diremos que es finito si lo es como objeto en C. Esto quiere decir que existe otro objeto B^* en C y una adjunción

$$B \otimes - \dashv B^* \otimes -.$$

Como se probó en

- **M.P. López López y E. Villanueva Nóvoa**: The antipode and the (co)invariants of a finite Hopf (co)quasigroup, Appl. Categor. Struct., 21 (2013), 237-247.

si B es finito su antípoda es un isomorfismo.

Teorema

Sean H y A subcuasigrupos de Hopf de de un cuasigrupo de Hopf X tal que las antípodas de A y H son isomorfismos. Asumamos que X se factoriza como $X = AH$. Entonces, ω_X es un isomorfismo de cuasigrupos de Hopf entre $A \otimes_{\Psi} H$ y X, donde Ψ es la ley distributiva a-comonoidal definida en el teorema anterior.

Teorema

Sean H, A y X cuasigrupos de Hopf tal que las antípodas de A y H son isomorfismos. Si X se factoriza como $X = AH$, existe un par emparejado (A, H) tal que X es isomorfo a $A \bowtie H$ como quasigrupos de Hopf.

Prueba

Tomamos

$$\varphi_A = (A \otimes \varepsilon_H) \circ \Psi, \quad \phi_H = (\varepsilon_A \otimes H) \circ \Psi.$$

.

Teorema

Sean H, A y X cuasigrupos de Hopf tal que las antípodas de A y H son isomorfismos. Entonces, X se factoriza como $X = AH$, si y sólo si, existe un par emparejado (A, H) tal que X es isomorfo a $A \bowtie H$ como quasigrupos de Hopf.

Los resultados de esta charla están disponibles en:

- **R. González Rodríguez**: Factorizations of Hopf quasigroups, Publ. Math. Debrecen, 1-2 (11) (2024), 195-219 (disponible en arXiv:2209.14718).
- **R. González Rodríguez**: Distributive laws and Hopf quasigroups, (2024) (disponible en arXiv:2402.02965).

¡Gracias!