Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ramón González Rodríguez

CENTRO DE INVESTIGACIÓN E TECNOLOXÍA MATEMÁTICA DE GALICIA

Universidade de Vigo

Escuela de la Red de Álgebra no Conmutativa (Nc-Alg)

PARTE I: Preliminares categóricos

Almería, 8-12 de julio de 2024

GOBIERNO DE ESPAÑA MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN

Ministerio de Ciencia e Innovación. Agencia Estatal de Investigación
Unión Europea – Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER)
RED2022-134631-T

Índice

Categorías

Definición

Una categoría C consiste en lo siguiente:

Definición

Una categoría C consiste en lo siguiente:

- Una clase $|C|$ cuyos elementos se llaman objetos de la categoría.

Definición

Una categoría C consiste en lo siguiente:

- Una clase |C| cuyos elementos se llaman objetos de la categoría.
- Para cada par de objetos X e Y, un conjunto $Hom_{C}(X, Y)$, cuyos elementos serán llamados morfismos de X a Y.

Definición

Una categoría C consiste en lo siguiente:

- Una clase |C| cuyos elementos se llaman objetos de la categoría.
- Para cada par de objetos X e Y, un conjunto $Hom_{C}(X, Y)$, cuyos elementos serán llamados morfismos de X a Y.
- Para cada terna de objetos X, Y, Z, una ley de composición

$$Hom_{C}(X, Y) \times Hom_{C}(Y, Z) \xrightarrow{\circ} Hom_{C}(X, Z)$$

donde la composición del par (f, g) se denotará por $\circ(f, g) := g \circ f$.

Definición

Una categoría C consiste en lo siguiente:

- Una clase $|\mathsf{C}|$ cuyos elementos se llaman objetos de la categoría.
- Para cada par de objetos X e Y, un conjunto $Hom_{\mathsf{C}}(X, Y)$, cuyos elementos serán llamados morfismos de X a Y.
- Para cada terna de objetos X, Y, Z, una ley de composición

$$Hom_{\mathsf{C}}(X, Y) \times Hom_{\mathsf{C}}(Y, Z) \xrightarrow{\circ} Hom_{\mathsf{C}}(X, Z)$$

  donde la composición del par (f, g) se denotará por $\circ(f, g) := g \circ f$.
- Para cada objeto X, un morfismo $id_X \in Hom_{\mathsf{C}}(X, X)$, llamado la identidad de X.

Definición

Una categoría C consiste en lo siguiente:

- Una clase $|C|$ cuyos elementos se llaman objetos de la categoría.
- Para cada par de objetos X e Y, un conjunto $Hom_C(X, Y)$, cuyos elementos serán llamados morfismos de X a Y.
- Para cada terna de objetos X, Y, Z, una ley de composición

$$Hom_C(X,Y) \times Hom_C(Y,Z) \stackrel{\circ}{\to} Hom_C(X,Z)$$

donde la composición del par (f,g) se denotará por $\circ(f,g) := g \circ f$.
- Para cada objeto X, un morfismo $id_X \in Hom_C(X,X)$, llamado la identidad de X. Sujetos a los siguientes axiomas:

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Definición

Una categoría C consiste en lo siguiente:

- Una clase $|C|$ cuyos elementos se llaman objetos de la categoría.
- Para cada par de objetos X e Y, un conjunto $Hom_C(X, Y)$, cuyos elementos serán llamados morfismos de X a Y.
- Para cada terna de objetos X, Y, Z, una ley de composición

$$Hom_C(X, Y) \times Hom_C(Y, Z) \xrightarrow{\circ} Hom_C(X, Z)$$

  donde la composición del par (f, g) se denotará por $\circ(f, g) := g \circ f$.
- Para cada objeto X, un morfismo $id_X \in Hom_C(X, X)$, llamado la identidad de X.

  Sujetos a los siguientes axiomas:
  - Axioma de Asociatividad: dados $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$, $g \in Hom_{\mathbf{C}}(Y, Z)$ y $h \in Hom_{\mathbf{C}}(Z, V)$ se tiene que:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Definición

Una categoría C consiste en lo siguiente:

- Una clase $|C|$ cuyos elementos se llaman objetos de la categoría.
- Para cada par de objetos X e Y, un conjunto $Hom_C(X, Y)$, cuyos elementos serán llamados morfismos de X a Y.
- Para cada terna de objetos X, Y, Z, una ley de composición

$$Hom_C(X, Y) \times Hom_C(Y, Z) \xrightarrow{\circ} Hom_C(X, Z)$$

  donde la composición del par (f, g) se denotará por $\circ(f, g) := g \circ f$.
- Para cada objeto X, un morfismo $id_X \in Hom_C(X, X)$, llamado la identidad de X.

  Sujetos a los siguientes axiomas:
  - Axioma de Asociatividad: dados $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$, $g \in Hom_{\mathbf{C}}(Y, Z)$ y $h \in Hom_{\mathbf{C}}(Z, V)$ se tiene que:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

  - Axioma de Identidad: dado $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ se tiene que:

$$id_Y \circ f = f, \quad f \circ id_X = f.$$

Dado un morfismo f en

$$Hom_{\mathsf{C}}(X, Y),$$

el objeto X será llamado el dominio de f e Y su codominio. Para los morfismos usaremos la notación:

$$f : X \to Y \quad \text{o} \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Dado un morfismo f en
$$Hom_{C}(X, Y),$$
el objeto X será llamado el dominio de f e Y su codominio. Para los morfismos usaremos la notación:
$$f : X \to Y \quad \text{o} \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Dado X un objeto de C, un morfismo en $Hom_{C}(X, X)$ se llamara endomorfismo de X.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Dado un morfismo f en

$$Hom_{\mathsf{C}}(X, Y),$$

el objeto X será llamado el dominio de f e Y su codominio. Para los morfismos usaremos la notación:

$$f : X \to Y \quad \text{o} \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Dado X un objeto de C, un morfismo en $Hom_{\mathsf{C}}(X, X)$ se llamara endomorfismo de X.

Definición

Una categoría C se llama pequeña si su clase de objetos es un conjunto.

Ejemplos

- Set (conjuntos y aplicaciones),

Ejemplos

- Set (conjuntos y aplicaciones),
- Rel (conjuntos y relaciones),

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ejemplos

- Set (conjuntos y aplicaciones),
- Rel (conjuntos y relaciones),
- Grp (grupos y homomorfismos de grupos),

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ejemplos

- Set (conjuntos y aplicaciones),
- Rel (conjuntos y relaciones),
- Grp (grupos y homomorfismos de grupos),
- Ab (grupos abelianos y homomorfismos de grupos),

Ejemplos

- Set (conjuntos y aplicaciones),
- Rel (conjuntos y relaciones),
- Grp (grupos y homomorfismos de grupos),
- Ab (grupos abelianos y homomorfismos de grupos),
- Div (grupos abelianos divisibles y homomorfismos de grupos),

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ejemplos

- Set (conjuntos y aplicaciones),
- Rel (conjuntos y relaciones),
- Grp (grupos y homomorfismos de grupos),
- Ab (grupos abelianos y homomorfismos de grupos),
- Div (grupos abelianos divisibles y homomorfismos de grupos),
- Rng (anillos conmutativos y homomorfismos de anillos),

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ejemplos

- Set (conjuntos y aplicaciones),
- Rel (conjuntos y relaciones),
- Grp (grupos y homomorfismos de grupos),
- Ab (grupos abelianos y homomorfismos de grupos),
- Div (grupos abelianos divisibles y homomorfismos de grupos),
- Rng (anillos conmutativos y homomorfismos de anillos),
- $\mathbb{F}$-Vect (espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y aplicaciones lineales),

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

- Sea R un anillo conmutativo. Con R-Mod denotaremos la categoría de módulos por la izquierda sobre R. Un R-módulo por la izquierda es un grupo abeliano $(M, +)$ con una acción

$$\varphi_M : R \times M \to M,$$

satisfaciendo que para todos $a, b \in R$ y $m, n \in M$ se tienen las siguientes identidades:

$$a(m+n) = am + an, \ \ (a+b)m = am + bm, \ \ (ab)m = a(bm), \ \ 1_R m = m$$

donde, por comodidad, $\varphi_M(a, m) = am$.
Un morfismo

$$f : M \to N$$

entre dos R-módulos por la izquierda es una aplicación tal que es R-lineal, i.e.,

$$f(m+n) = f(m) + f(n), \ \ f(am) = af(m)$$

para todos $a \in R$ y $m \in M$.

Definición

Una categoría D se dice que es una subcategoría de una categoría C si $|D|$ es una subclase de $|C|$ tal que para cada par de objetos X e Y de D se tiene que

$$Hom_{D}(X, Y) \subset Hom_{C}(X, Y).$$

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Definición

Una categoría D se dice que es una subcategoría de una categoría C si $|D|$ es una subclase de $|C|$ tal que para cada par de objetos X e Y de D se tiene que

$$Hom_{D}(X, Y) \subset Hom_{C}(X, Y).$$

Si en el caso anterior se cumple que para todo par de objetos X e Y de D se tiene que

$$Hom_{D}(X, Y) = Hom_{C}(X, Y),$$

se dirá que D es una subcategoría plena de C.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Definición

Una categoría D se dice que es una subcategoría de una categoría C si $|D|$ es una subclase de $|C|$ tal que para cada par de objetos X e Y de D se tiene que

$$Hom_{D}(X, Y) \subset Hom_{C}(X, Y).$$

Si en el caso anterior se cumple que para todo par de objetos X e Y de D se tiene que

$$Hom_{D}(X, Y) = Hom_{C}(X, Y),$$

se dirá que D es una subcategoría plena de C.

Ejemplo

La categoría Ab es una subcategoría plena de Grp.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Definición

Un morfismo $f : Y \to Z$ en una categoría C es un monomorfismo si para todo objeto X y morfismos $g, h : X \to Y$ se tiene que

$$f \circ g = f \circ h \ \Rightarrow \ g = h.$$

Un morfismo $f : X \to Y$ en una categoría C es un epimorfismo si para todo objeto Z y morfismos $g, h : Y \to Z$ se tiene que

$$g \circ f = h \circ f \ \Rightarrow \ g = h.$$

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ejemplos

- En la categoría Set los monomorfismos son exactamente las aplicaciones inyectivas.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ejemplos

- En la categoría Set los monomorfismos son exactamente las aplicaciones inyectivas.
- En las categorías Gpr y Ab los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de grupos.

Ejemplos

- En la categoría Set los monomorfismos son exactamente las aplicaciones inyectivas.
- En las categorías Gpr y Ab los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de grupos.
- En la categoría Rng los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de anillos.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ejemplos

- En la categoría Set los monomorfismos son exactamente las aplicaciones inyectivas.
- En las categorías Gpr y Ab los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de grupos.
- En la categoría Rng los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de anillos.
- En la categoría R-Mod los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de módulos.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ejemplos

- En la categoría Set los monomorfismos son exactamente las aplicaciones inyectivas.
- En las categorías Gpr y Ab los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de grupos.
- En la categoría Rng los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de anillos.
- En la categoría R-Mod los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de módulos.
- En Div el morfismo cociente $p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ no es inyectivo pero si es un monomorfismo en Div.

Ejemplos

- En la categoría Set los monomorfismos son exactamente las aplicaciones inyectivas.
- En las categorías Gpr y Ab los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de grupos.
- En la categoría Rng los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de anillos.
- En la categoría R-Mod los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de módulos.
- En Div el morfismo cociente $p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ no es inyectivo pero si es un monomorfismo en Div.
- En la categoría Set los epimorfismos son exactamente las aplicaciones sobreyectivas.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ejemplos

- En la categoría Set los monomorfismos son exactamente las aplicaciones inyectivas.
- En las categorías Gpr y Ab los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de grupos.
- En la categoría Rng los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de anillos.
- En la categoría R-Mod los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de módulos.
- En Div el morfismo cociente $p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ no es inyectivo pero si es un monomorfismo en Div.
- En la categoría Set los epimorfismos son exactamente las aplicaciones sobreyectivas.
- En las categorías Gpr y Ab los epimorfismos son exactamente las morfismos sobreyectivos de grupos.

Ejemplos

- En la categoría Set los monomorfismos son exactamente las aplicaciones inyectivas.
- En las categorías Gpr y Ab los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de grupos.
- En la categoría Rng los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de anillos.
- En la categoría R-Mod los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de módulos.
- En Div el morfismo cociente $p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ no es inyectivo pero si es un monomorfismo en Div.
- En la categoría Set los epimorfismos son exactamente las aplicaciones sobreyectivas.
- En las categorías Gpr y Ab los epimorfismos son exactamente las morfismos sobreyectivos de grupos.
- En la categoría R-Mod los epimorfismos son exactamente las morfismos sobreyectivos de módulos.

Ejemplos

- En la categoría Set los monomorfismos son exactamente las aplicaciones inyectivas.
- En las categorías Gpr y Ab los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de grupos.
- En la categoría Rng los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de anillos.
- En la categoría R-Mod los monomorfismos son exactamente las morfismos inyectivos de módulos.
- En Div el morfismo cociente $p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ no es inyectivo pero si es un monomorfismo en Div.
- En la categoría Set los epimorfismos son exactamente las aplicaciones sobreyectivas.
- En las categorías Gpr y Ab los epimorfismos son exactamente las morfismos sobreyectivos de grupos.
- En la categoría R-Mod los epimorfismos son exactamente las morfismos sobreyectivos de módulos.
- En la categoría Rng el morfismo $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ no es sobreyectivo pero si resulta ser un epimorfismo en Rng.

Definition

Un morfismo $f : X \to Y$ en una categoría C se dice que es un isomorfismo si existe un morfismo $g : Y \to X$ tal que

$$g \circ f = id_X, \quad f \circ g = id_Y.$$

En este caso diremos que g es el inverso de f y lo denotaremos por f^{-1}.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Definition

Un morfismo $f : X \to Y$ en una categoría C se dice que es un isomorfismo si existe un morfismo $g : Y \to X$ tal que

$$g \circ f = id_X, \quad f \circ g = id_Y.$$

En este caso diremos que g es el inverso de f y lo denotaremos por f^{-1}.

Es fácil probar que el inverso de un isomorfismo es único y que la composición de isomorfismos es un isomorfismo. Por otro lado, el morfismo identidad es un isomorfismo para todo objeto en la categoría. Finalmente, si f es un isomorfismo, f es un monomorfismo y un epimorfismo (la implicación contraria no se tiene como, por ejemplo, pasa en la categoría de espacios topológicos Top).

Definition

Un morfismo $f : X \to Y$ en una categoría C se dice que es un isomorfismo si existe un morfismo $g : Y \to X$ tal que

$$g \circ f = id_X, \quad f \circ g = id_Y.$$

En este caso diremos que g es el inverso de f y lo denotaremos por f^{-1}.

Es fácil probar que el inverso de un isomorfismo es único y que la composición de isomorfismos es un isomorfismo. Por otro lado, el morfismo identidad es un isomorfismo para todo objeto en la categoría. Finalmente, si f es un isomorfismo, f es un monomorfismo y un epimorfismo (la implicación contraria no se tiene como, por ejemplo, pasa en la categoría de espacios topológicos Top).

Definition

Un grupoide es una categoría G donde todo morfismo es un isomorfismo.

Ejemplos

Ejemplos

- Sea $\{(G_i, *_i)\}_{i\in I}$ una familia de grupos indexada por un conjunto I. Consideremos la categoría G donde $|\mathsf{G}| = I$,

$$Hom_{\mathsf{G}}(i,j) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i \neq j \\ G_i & \text{si } j = i \end{cases}$$

y la composición en $Hom_{\mathsf{G}}(i,i)$ esta dada por el producto en G_i:

$$g \circ f = g *_i f$$

donde $f, g \in G_i$. En este caso todo morfismo f es un morfismo con inverso f^{-1}.

Ejemplos

- Sea $\{(G_i, *_i)\}_{i\in I}$ una familia de grupos indexada por un conjunto I. Consideremos la categoría G donde $|\mathsf{G}| = I$,

$$Hom_{\mathsf{G}}(i,j) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i \neq j \\ G_i & \text{si } j = i \end{cases}$$

  y la composición en $Hom_{\mathsf{G}}(i,i)$ esta dada por el producto en G_i:

$$g \circ f = g *_i f$$

  donde $f, g \in G_i$. En este caso todo morfismo f es un morfismo con inverso f^{-1}.
- Por lo tanto, todo grupo G induce un grupoide G donde $|\mathsf{G}| = \{1\}$ y

$$Hom_{\mathsf{G}}(1,1) = G.$$

Ejemplos

- Sea $\{(G_i, *_i)\}_{i\in I}$ una familia de grupos indexada por un conjunto I. Consideremos la categoría G donde $|\mathsf{G}| = I$,

$$Hom_{\mathsf{G}}(i,j) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i \neq j \\ G_i & \text{si } j = i \end{cases}$$

  y la composición en $Hom_{\mathsf{G}}(i,i)$ esta dada por el producto en G_i:

$$g \circ f = g *_i f$$

  donde $f, g \in G_i$. En este caso todo morfismo f es un morfismo con inverso f^{-1}.

- Por lo tanto, todo grupo G induce un grupoide G donde $|\mathsf{G}| = \{1\}$ y

$$Hom_{\mathsf{G}}(1,1) = G.$$

- Sea C una categoría. La subcategoría de isomorfismos C, denotada por C^{is}, está dada por $|\mathsf{C}^{is}| = |\mathsf{C}|$ y por

$$Hom_{\mathsf{C}^{is}}(X,Y) = \{f \in Hom_{\mathsf{C}}(X,Y) \ / \ f \text{ es un isomorfismo}\}.$$

  Entonces C^{is} es un grupoide.

Definición

Sea C una categoría y consideremos dos morfismos $f, g : X \to Y$ en C. El igualador de los dos morfismos es un par (E, i) consistente en un objeto E y un morfismo $i : E \to X$ tales que $f \circ i = g \circ i$ y satisfaciendo la siguiente propiedad universal: para cualquier par $(T, t : T \to X)$, tal que $f \circ t = g \circ t$, existe un único morfimo $u : T \to E$ tal que $t = i \circ u$.

Definición

Sea C una categoría y consideremos dos morfismos $f, g : X \to Y$ en C. El igualador de los dos morfismos es un par (E, i) consistente en un objeto E y un morfismo $i : E \to X$ tales que $f \circ i = g \circ i$ y satisfaciendo la siguiente propiedad universal: para cualquier par $(T, t : T \to X)$, tal que $f \circ t = g \circ t$, existe un único morfimo $u : T \to E$ tal que $t = i \circ u$.

Nótese que en la definición anterior el morfismo $i : E \to X$ resulta ser un monomorfismo.

La noción dual de igualador es la de coigualador. Explicitamente: el coigualador de los morfismos $f, g : X \to Y$, es un par (C, p), consistente en un objeto C y un morfismo $p : Y \to C$, tal que $p \circ f = p \circ g$. Además se requiere que se cumpla la siguiente propiedad universal: para todo par $(T, t : Y \to T)$, tal que $t \circ f = t \circ g$, existe un único morfismo $u : C \to T$ tal que $t = u \circ p$.

La noción dual de igualador es la de coigualador. Explicitamente: el coigualador de los morfismos $f, g : X \to Y$, es un par (C, p), consistente en un objeto C y un morfismo $p : Y \to C$, tal que $p \circ f = p \circ g$. Además se requiere que se cumpla la siguiente propiedad universal: para todo par $(T, t : Y \to T)$, tal que $t \circ f = t \circ g$, existe un único morfismo $u : C \to T$ tal que $t = u \circ p$.

Nótese que en la definición anterior el morfismo $p : Y \to C$ resulta ser un epimorfismo.

La noción dual de igualador es la de coigualador. Explicitamente: el coigualador de los morfismos $f, g : X \to Y$, es un par (C, p), consistente en un objeto C y un morfismo $p : Y \to C$, tal que $p \circ f = p \circ g$. Además se requiere que se cumpla la siguiente propiedad universal: para todo par $(T, t : Y \to T)$, tal que $t \circ f = t \circ g$, existe un único morfismo $u : C \to T$ tal que $t = u \circ p$.

Nótese que en la definición anterior el morfismo $p : Y \to C$ resulta ser un epimorfismo.

Usando la propiedad universal, es fácil probar, que en el caso de que existan, igualadores y coigualadores son únicos salvo isomorfismos.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ejemplos

- En las categorías Set , Grp, Rng, R-Mod, el igualador de dos morfismos

$$f, g : X \to Y$$

está dado por

$$\mathrm{Ker}(f, g) = \{x \in X \ / \ f(x) = g(x)\}.$$

Ejemplos

- En las categorías Set , Grp, Rng, R-Mod, el igualador de dos morfismos
$$f, g : X \to Y$$
está dado por
$$\mathrm{Ker}(f, g) = \{x \in X \ / \ f(x) = g(x)\}.$$
- En la categoría Set el coigualador de de dos morfismos $f, g : X \to Y$ está dado por el cociente de Y y su correspondiente proyección definidos por la relación de equivalencia generada por los pares $(f(x), g(x))$ con $x \in X$, i.e., la menor relación de equivalencia que contiene a la relación Λ donde
$$y \, \Lambda \, y' \iff \exists \, x \in X \ / \ y = f(x), \ y' = g(x).$$

Ejemplos

- En las categorías Set , Grp, Rng, R-Mod, el igualador de dos morfismos
$$f, g : X \to Y$$
está dado por
$$\mathrm{Ker}(f, g) = \{x \in X \ / \ f(x) = g(x)\}.$$
- En la categoría Set el coigualador de de dos morfismos $f, g : X \to Y$ está dado por el cociente de Y y su correspondiente proyección definidos por la relación de equivalencia generada por los pares $(f(x), g(x))$ con $x \in X$, i.e., la menor relación de equivalencia que contiene a la relación Λ donde
$$y \,\Lambda\, y' \iff \exists\, x \in X \ / \ y = f(x), \ y' = g(x).$$
- En la categoría de grupos el objeto coigualador de dos morfismos $f, g : X \to Y$ es el grupo cociente de Y/H donde H es el subgrupo normal de Y generado por $\{f(x)^{-1}g(x) \ / \ x \in X\}$. El morfismo coigualador es la correspondiente proyección.

Ejemplos

- En las categorías Set , Grp, Rng, R-Mod, el igualador de dos morfismos
$$f, g : X \to Y$$
está dado por
$$\mathrm{Ker}(f, g) = \{x \in X \;/\; f(x) = g(x)\}.$$
- En la categoría Set el coigualador de de dos morfismos $f, g : X \to Y$ está dado por el cociente de Y y su correspondiente proyección definidos por la relación de equivalencia generada por los pares $(f(x), g(x))$ con $x \in X$, i.e., la menor relación de equivalencia que contiene a la relación Λ donde
$$y \,\Lambda\, y' \iff \exists\, x \in X \;/\; y = f(x),\; y' = g(x).$$
- En la categoría de grupos el objeto coigualador de dos morfismos $f, g : X \to Y$ es el grupo cociente de Y/H donde H es el subgrupo normal de Y generado por $\{f(x)^{-1}g(x) \;/\; x \in X\}$. El morfismo coigualador es la correspondiente proyección.
- La categoría R-Mod (resp. Rng) tiene coigualadores. Si $f, g : X \to Y$ son dos morfismos en la categoría, el coigualador de ambos es el par $(Y/S, p)$, donde Y/S es el R-módulo (resp. anillo) cociente de Y por el submódulo (resp. ideal) S generado por el subconjunto $\{f(x) - g(x) \;/\; x \in X\}$ y $p : Y \to Y/S$ es la proyección.

Definición

Sea C una categoría. Diremos que un morfismo $q : X \to X$ es idempotente si $q \circ q = q$.

Definición

Sea C una categoría. Diremos que un morfismo $q : X \to X$ es idempotente si $q \circ q = q$.

Definición

Sea C una categoría. Diremos que admite idempotentes rotos si para todo morfismo idempotente $q : X \to X$ se cumple que existe un objeto $I(q)$, llamado imagen de q, y dos morfismos $i_X : I(q) \to X$, $p_X : X \to I(q)$ tales que $i_X \circ p_X = q$ y $p_X \circ i_X = id_{I(q)}$.

Definición

Sea C una categoría. Diremos que un morfismo $q : X \to X$ es idempotente si $q \circ q = q$.

Definición

Sea C una categoría. Diremos que admite idempotentes rotos si para todo morfismo idempotente $q : X \to X$ se cumple que existe un objeto $I(q)$, llamado imagen de q, y dos morfismos $i_X : I(q) \to X$, $p_X : X \to I(q)$ tales que $i_X \circ p_X = q$ y $p_X \circ i_X = id_{I(q)}$.

Nótese que en la definición anterior el morfismo p_X es un epimorfismo, el morfismo i_X es un monomorfismo y la imagen de q es única salvo isomorfismos.

Definición

Sea C una categoría. Diremos que un morfismo $q : X \to X$ es idempotente si $q \circ q = q$.

Definición

Sea C una categoría. Diremos que admite idempotentes rotos si para todo morfismo idempotente $q : X \to X$ se cumple que existe un objeto $I(q)$, llamado imagen de q, y dos morfismos $i_X : I(q) \to X$, $p_X : X \to I(q)$ tales que $i_X \circ p_X = q$ y $p_X \circ i_X = id_{I(q)}$.

Nótese que en la definición anterior el morfismo p_X es un epimorfismo, el morfismo i_X es un monomorfismo y la imagen de q es única salvo isomorfismos.

Teorema

Si C es una categoría con igualadores o con coigualadores, se cumple que C admite idempotentes rotos.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Definición

Un funtor $F : C \to D$ de la categoría C a la categoría D consiste en lo siguiente:

Definición

Un funtor $\mathsf{F} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ de la categoría C a la categoría D consiste en lo siguiente:

- Una aplicación $|\mathsf{C}| \to |\mathsf{D}|$ entre las clases de objetos de C y D donde la imagen de un objeto $X \in |\mathsf{C}|$ se denotará por $\mathsf{F}(X)$.

Definición

Un funtor $\mathrm{F} : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ de la categoría C a la categoría D consiste en lo siguiente:

- Una aplicación $|\mathrm{C}| \to |\mathrm{D}|$ entre las clases de objetos de C y D donde la imagen de un objeto $X \in |\mathrm{C}|$ se denotará por $\mathrm{F}(X)$.
- Para cada par de objetos $X,\ Y\ \in |\mathrm{C}|$, una aplicación

$$Hom_{\mathrm{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathrm{D}}(\mathrm{F}(X), \mathrm{F}(Y))$$

  donde la imagen de un morfismo $f \in Hom_{\mathrm{C}}(X, Y)$ se denotará por $\mathrm{F}(f)$.

Definición

Un funtor $\mathsf{F} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ de la categoría C a la categoría D consiste en lo siguiente:

- Una aplicación $|\mathsf{C}| \to |\mathsf{D}|$ entre las clases de objetos de C y D donde la imagen de un objeto $X \in |\mathsf{C}|$ se denotará por $\mathsf{F}(X)$.
- Para cada par de objetos $X,\ Y\ \in |\mathsf{C}|$, una aplicación

$$Hom_{\mathsf{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathsf{D}}(\mathsf{F}(X), \mathsf{F}(Y))$$

  donde la imagen de un morfismo $f \in Hom_{\mathsf{C}}(X, Y)$ se denotará por $\mathsf{F}(f)$.

  Estos datos están sujetos a los axiomas:

Definición

Un funtor $\mathsf{F} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ de la categoría C a la categoría D consiste en lo siguiente:

- Una aplicación $|\mathsf{C}| \to |\mathsf{D}|$ entre las clases de objetos de C y D donde la imagen de un objeto $X \in |\mathsf{C}|$ se denotará por $\mathsf{F}(X)$.
- Para cada par de objetos $X, \ Y \ \in |\mathsf{C}|$, una aplicación

  $$Hom_{\mathsf{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathsf{D}}(\mathsf{F}(X), \mathsf{F}(Y))$$

  donde la imagen de un morfismo $f \in Hom_{\mathsf{C}}(X, Y)$ se denotará por $\mathsf{F}(f)$.

  Estos datos están sujetos a los axiomas:
- $\mathsf{F}(id_X) = id_{\mathsf{F}(X)}, \ \forall \ X \in |\mathsf{C}|$.

Definición

Un funtor $\mathsf{F} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ de la categoría C a la categoría D consiste en lo siguiente:

- Una aplicación $|\mathsf{C}| \to |\mathsf{D}|$ entre las clases de objetos de C y D donde la imagen de un objeto $X \in |\mathsf{C}|$ se denotará por $\mathsf{F}(X)$.
- Para cada par de objetos $X,\ Y\ \in |\mathsf{C}|$, una aplicación

$$Hom_{\mathsf{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathsf{D}}(\mathsf{F}(X), \mathsf{F}(Y))$$

  donde la imagen de un morfismo $f \in Hom_{\mathsf{C}}(X, Y)$ se denotará por $\mathsf{F}(f)$.

  Estos datos están sujetos a los axiomas:

- $\mathsf{F}(id_X) = id_{\mathsf{F}(X)},\ \forall\ X \in |\mathsf{C}|$.
- Para todo par de morfismos $f \in Hom_{\mathsf{C}}(X, Y)$ y $g \in Hom_{\mathsf{C}}(Y, Z)$ se tiene que

$$\mathsf{F}(g \circ f) = \mathsf{F}(g) \circ \mathsf{F}(f).$$

Definición

Un funtor $\mathsf{F} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ de la categoría C a la categoría D consiste en lo siguiente:

- Una aplicación $|\mathsf{C}| \to |\mathsf{D}|$ entre las clases de objetos de C y D donde la imagen de un objeto $X \in |\mathsf{C}|$ se denotará por $\mathsf{F}(X)$.
- Para cada par de objetos $X,\ Y\ \in |\mathsf{C}|$, una aplicación

  $$Hom_{\mathsf{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathsf{D}}(\mathsf{F}(X), \mathsf{F}(Y))$$

  donde la imagen de un morfismo $f \in Hom_{\mathsf{C}}(X, Y)$ se denotará por $\mathsf{F}(f)$.

  Estos datos están sujetos a los axiomas:
- $\mathsf{F}(id_X) = id_{\mathsf{F}(X)},\ \forall\ X \in |\mathsf{C}|$.
- Para todo par de morfismos $f \in Hom_{\mathsf{C}}(X, Y)$ y $g \in Hom_{\mathsf{C}}(Y, Z)$ se tiene que

  $$\mathsf{F}(g \circ f) = \mathsf{F}(g) \circ \mathsf{F}(f).$$

Definición

Un funtor $\mathsf{F} : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ se llamará endofuntor.

Si $F : C \to D$ y $G : D \to E$ son funtores, la composición

$$G \circ F : C \to E$$

es un funtor de C a E.

Si $F : C \to D$ y $G : D \to E$ son funtores, la composición

$$G \circ F : C \to E$$

es un funtor de C a E.

Para toda categoría C existe un endofuntor Id_C, llamado funtor identidad de C, que actúa como la identidad en objetos y morfismos.

Si $F : C \to D$ y $G : D \to E$ son funtores, la composición

$$G \circ F : C \to E$$

es un funtor de C a E.

Para toda categoría C existe un endofuntor Id_C, llamado funtor identidad de C, que actúa como la identidad en objetos y morfismos.

La inclusión de una subcategoría E en una categoría C es funtorial y el correspondiente funtor será denotado por i_E.

Ejemplos.

- El funtor de olvido $\mathrm{U} : \mathrm{Gpr} \to \mathrm{Set}$ que envía cada grupo $(G, *)$ en el conjunto G y un homomorfismo de grupos f en la correspondiente aplicación f.

Ejemplos.

- El funtor de olvido $\mathrm{U} : \mathrm{Gpr} \to \mathrm{Set}$ que envía cada grupo $(G, *)$ en el conjunto G y un homomorfismo de grupos f en la correspondiente aplicación f.
- De la misma forma se pueden definir funtores de olvido para las otras categorías de objetos con estructura algebraica.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ejemplos.

- El funtor de olvido U : Gpr $\rightarrow$ Set que envía cada grupo $(G, *)$ en el conjunto G y un homomorfismo de grupos f en la correspondiente aplicación f.
- De la misma forma se pueden definir funtores de olvido para las otras categorías de objetos con estructura algebraica.
- Dada una categoría C y X un objeto de dicha categoría, definimos el funtor

$$Hom_{\mathsf{C}}(X, -) : \mathsf{C} \rightarrow \mathsf{Set}$$

en objetos como

$$Hom_{\mathsf{C}}(X, -)(Y) = Hom_{\mathsf{C}}(X, Y)$$

y en morfismos $f : Y \rightarrow Z$ por

$$Hom_{\mathsf{C}}(X, f) : Hom_{\mathsf{C}}(X, Y) \rightarrow Hom_{\mathsf{C}}(X, Z)$$

donde

$$Hom_{\mathsf{C}}(X, f)(g) = f \circ g.$$

Este tipo de funtores se llaman representables (el funtor está representado por el objeto X).

- Sea R un anillo conmutativo. Sea M un objeto en R-Mod. Podemos definir un funtor

$$Hom_R(M,-) := Hom_{R\text{-Mod}}(M,-) : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$$

por

$$Hom_R(M,-)(X) = Hom_R(M,X)$$

y $Hom_R(M,-)(f) = Hom_R(M,f)$, donde, si $f : N \to P$,

$$Hom_R(M,f) : Hom_R(M,N) \to Hom_R(M,P)$$

es $Hom_R(M,f)(g) = f \circ g$.

- Sea R un anillo conmutativo. En este ejemplo veremos la construcción explícita del producto tensor en R-Mod. Sean M, N, P objetos en R-Mod. Una aplicación $\gamma : M \times N \to P$ se llama bilineal si

$$\gamma(m_1 + m_2, n) = \gamma(m_1, n) + \gamma(m_2, n), \quad \gamma(m, n_1 + n_2) = \gamma(m, n_1) + \gamma(m, n_2),$$

$$\gamma(am, n) = a\gamma(m, n) = \gamma(m, an),$$

para todos $m_1, m_2, m \in M$, $n_1, n_2, n \in N$ y $a \in R$.

- Sea R un anillo conmutativo. En este ejemplo veremos la construcción explícita del producto tensor en R-Mod. Sean M, N, P objetos en R-Mod. Una aplicación $\gamma : M \times N \to P$ se llama bilineal si

$$\gamma(m_1 + m_2, n) = \gamma(m_1, n) + \gamma(m_2, n), \quad \gamma(m, n_1 + n_2) = \gamma(m, n_1) + \gamma(m, n_2),$$

$$\gamma(am, n) = a\gamma(m, n) = \gamma(m, an),$$

para todos $m_1, m_2, m \in M$, $n_1, n_2, n \in N$ y $a \in R$.

El producto tensor de M y N es un R-módulo por la izquierda $M \otimes_R N$ equipado con un morfismo bilineal

$$\otimes : M \times N \to M \otimes_R N$$

tal que para cualquier aplicación bilineal $\gamma : M \times N \to P$ existe una única aplicación lineal

$$t : M \otimes_R N \to P$$

tal que $t \circ \otimes = \gamma$.

- Sea R un anillo conmutativo. En este ejemplo veremos la construcción explícita del producto tensor en R-Mod. Sean M, N, P objetos en R-Mod. Una aplicación $\gamma : M \times N \to P$ se llama bilineal si

$$\gamma(m_1 + m_2, n) = \gamma(m_1, n) + \gamma(m_2, n), \;\; \gamma(m, n_1 + n_2) = \gamma(m, n_1) + \gamma(m, n_2),$$

$$\gamma(am, n) = a\gamma(m, n) = \gamma(m, an),$$

para todos $m_1, m_2, m \in M$, $n_1, n_2, n \in N$ y $a \in R$.

El producto tensor de M y N es un R-módulo por la izquierda $M \otimes_R N$ equipado con un morfismo bilineal

$$\otimes : M \times N \to M \otimes_R N$$

tal que para cualquier aplicación bilineal $\gamma : M \times N \to P$ existe una única aplicación lineal

$$t : M \otimes_R N \to P$$

tal que $t \circ \otimes = \gamma$.

Como consecuencia de esta última propiedad universal se tiene que $M \otimes_R N$ es único salvo isomorfismos.

El producto tensor de M y N existe y su construcción es la siguiente: Sea

$$F_R(M \times N) = \bigoplus_{(m,n) \in M \times N} Re_{m,n}$$

el R-módulo libre generado por una base indexada por los elementos de M y N, i.e. los elementos de $F_R(M \times N)$ son combinaciones lineales finitas de vectores $e_{m,n}$, donde $m \in M$ y $n \in N$. consideremos ahora el submódulo T generado por los siguientes elementos:

$$e_{m+m',n} - e_{m,n} - e_{m',n}, \quad e_{m,n+n'} - e_{m,n} - e_{m,n'},$$

$$e_{am,n} - ae_{m,n}, \quad e_{m,an} - ae_{m,n}.$$

El producto tensor de M y N existe y su construcción es la siguiente: Sea

$$F_R(M \times N) = \bigoplus_{(m,n)\in M\times N} Re_{m,n}$$

el R-módulo libre generado por una base indexada por los elementos de M y N, i.e. los elementos de $F_R(M \times N)$ son combinaciones lineales finitas de vectores $e_{m,n}$, donde $m \in M$ y $n \in N$. consideremos ahora el submódulo T generado por los siguientes elementos:

$$e_{m+m',n} - e_{m,n} - e_{m',n}, \quad e_{m,n+n'} - e_{m,n} - e_{m,n'},$$

$$e_{am,n} - ae_{m,n}, \quad e_{m,an} - ae_{m,n}.$$

Definamos $M \otimes_R N := F_R(M \times N)/T$ y escribamos la clase $e_{m,n} + T$ en $M \otimes_R N$ como $m \otimes n$. Entonces $M \otimes_R N$ es un R-módulo por la izquierda donde

$$(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n, \quad m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n',$$

$$am \otimes n = a(m \otimes n), \quad m \otimes an = a(m \otimes n).$$

Como consecuencia, la aplicación

$$\otimes : M \times N \to M \otimes_R N$$

definida por $\otimes(m, n) = m \otimes n$ es bilineal y si $\gamma : M \times N \to P$ es una aplicación bilineal, $\gamma(T) = 0$. Por lo tanto, existe una única aplicación lineal

$$t : M \otimes_R N \to P$$

tal que $t \circ \otimes = \gamma$. Por lo tanto los elementos de $M \otimes_R N$ son sumas del tipo

$$a_1(m_1 \otimes n_1) + \cdots + a_k(m_k \otimes n_k).$$

Como consecuencia, la aplicación

$$\otimes : M \times N \to M \otimes_R N$$

definida por $\otimes(m, n) = m \otimes n$ es bilineal y si $\gamma : M \times N \to P$ es una aplicación bilineal, $\gamma(T) = 0$. Por lo tanto, existe una única aplicación lineal

$$t : M \otimes_R N \to P$$

tal que $t \circ \otimes = \gamma$. Por lo tanto los elementos de $M \otimes_R N$ son sumas del tipo

$$a_1(m_1 \otimes n_1) + \cdots + a_k(m_k \otimes n_k).$$

Por otro lado, si $f : M \to V$ y $g : N \to W$ son morfismos de R-módulos por la izquierda, el morfismo $f \otimes_R g$ es el único tal que $(f \otimes_R g) \circ \otimes = \otimes(f \times g)$. Para obtener $f \otimes_R g$ usamos que $\otimes(f \times g)$ es bilineal y, de esta forma, aplicamos la la propiedad universal que define el producto tensor. Entonces,

$$(f \otimes_R g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n).$$

Nótese que, usando la propiedad universal del producto tensor, un R-módulo por la izquierda puede definirse como un grupo abeliano $(M, +)$ con un morfismo de R-módulos por la izquierda

$$\varphi_M : R \otimes_R M \to M,$$

satisfaciendo para todos $a, b \in R$ y $m \in M$ las siguientes identidades:

$$\varphi_M((\mu_R(a \otimes b)) \otimes m) = \varphi_M(a \otimes (\varphi_M(b \otimes m))), \;\; \varphi_M(1_R \otimes m) = m$$

donde $\mu_R : R \otimes_R R \to R$ definido por $\mu_R(a \otimes b) = ab$ es el producto en R inducido por el morfismo $R \times R \to R$, $(a, b) \to ab$.

Nótese que, usando la propiedad universal del producto tensor, un R-módulo por la izquierda puede definirse como un grupo abeliano $(M, +)$ con un morfismo de R-módulos por la izquierda

$$\varphi_M : R \otimes_R M \to M,$$

satisfaciendo para todos $a, b \in R$ y $m \in M$ las siguientes identidades:

$$\varphi_M((\mu_R(a \otimes b)) \otimes m) = \varphi_M(a \otimes (\varphi_M(b \otimes m))), \;\; \varphi_M(1_R \otimes m) = m$$

donde $\mu_R : R \otimes_R R \to R$ definido por $\mu_R(a \otimes b) = ab$ es el producto en R inducido por el morfismo $R \times R \to R$, $(a, b) \to ab$.

Sea M un objeto en R-Mod. El funtor producto tensor

$$- \otimes_R M : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod},$$

asocia a cada R-módulo por la izquierda X el objeto $X \otimes_R M$.
Para cada morfismo está definido como

$$(- \otimes_R M)(f) = f \otimes_R id_M.$$

Similarmente se define el funtor $M \otimes_R -$.

Definición

Sean F, G funtores de la categoría C a la categoría D. Una transformación natural $\alpha : \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G}$ es una familia de morfismos

$$\{\alpha_V : \mathsf{F}(V) \to \mathsf{G}(V)\}_{V \in |\mathsf{C}|}$$

en D tal que para todo morfismo $f : V \to W$ en C se tiene que

$$\mathsf{G}(f) \circ \alpha_V = \alpha_W \circ \mathsf{F}(f).$$

Si α_V es un isomorfismo para todo $V \in |\mathsf{C}|$ diremos que α es un isomorfismo natural.

Ejemplo

Si R es un anillo conmutativo y $f : M \to N$ es un morfismo en la categoría R-Mod, se tiene que

$$- \otimes_R f : - \otimes_R M \Rightarrow - \otimes_R N$$

es una transformación natural dada por

$$(- \otimes_R f)_V := id_V \otimes_R f : V \otimes_R M \to V \otimes_R N.$$

Teorema

Sean F, G, y H funtores de la categoría C a la categoría D. Sean $\alpha : \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G}$, $\beta : \mathsf{G} \Rightarrow \mathsf{H}$ transformaciones naturales. Entonces la familia de morfismos en D

$$\{(\beta \bullet \alpha)_V : \mathsf{F}(V) \to \mathsf{H}(V)\}_{V \in |\mathsf{C}|}$$

definida por

$$(\beta \bullet \alpha)_V = \beta_V \circ \alpha_V$$

es una transformación natural denotada por $\beta \bullet \alpha : \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{H}$ y llamada la composición vertical de α y β.

Teorema

Sean F, G, y H funtores de la categoría C a la categoría D. Sean $\alpha : \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G}$, $\beta : \mathsf{G} \Rightarrow \mathsf{H}$ transformaciones naturales. Entonces la familia de morfismos en D

$$\{(\beta \bullet \alpha)_V : \mathsf{F}(V) \to \mathsf{H}(V)\}_{V \in |\mathsf{C}|}$$

definida por

$$(\beta \bullet \alpha)_V = \beta_V \circ \alpha_V$$

es una transformación natural denotada por $\beta \bullet \alpha : \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{H}$ y llamada la composición vertical de α y β.

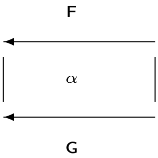
La composición vertical es asociativa. Además tiene para cada funtor F una identidad, la transformación natural identidad dada por $id_{\mathsf{F}} : \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{F}$ donde

$$(id_{\mathsf{F}})_V = id_{\mathsf{F}(V)}.$$

Podemos representar cada transformación natural

$$\alpha : \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G}$$

entre funtores $\mathsf{F}, \mathsf{G} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ como:



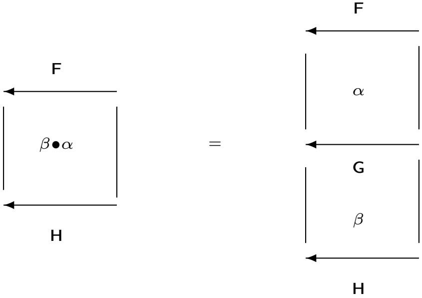
Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

o

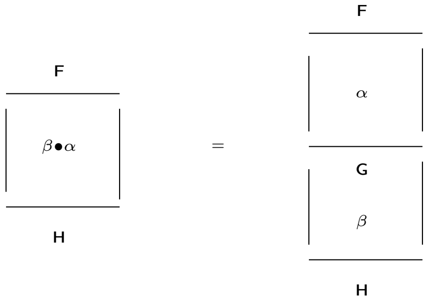
$$\begin{array}{c} F \\ \boxed{\quad\alpha\quad} \\ G \end{array}$$

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

De esta forma la composición vertical se puede expresar como

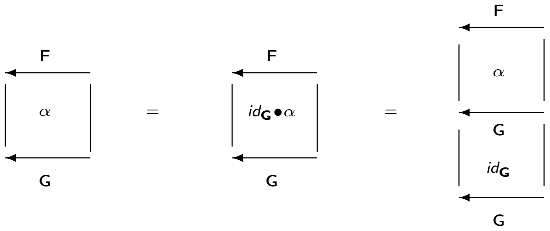


o por

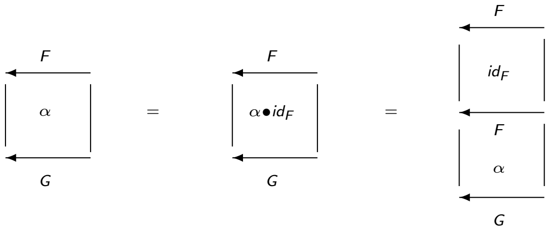


Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

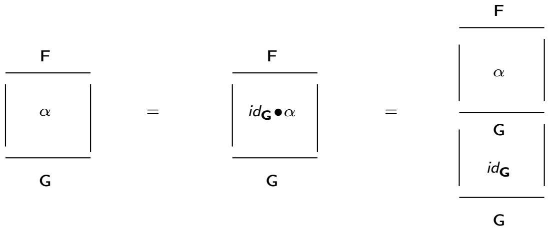
Las igualdades para las identidades son:



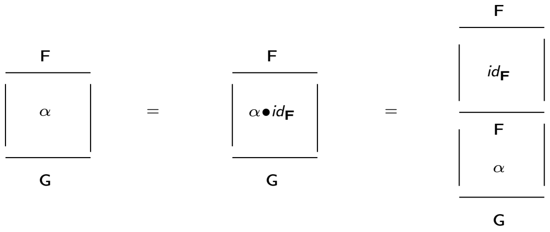
y



O



y



Definición

Dadas dos categorías C y D, si C es pequeña, podemos construir la categoría de funtores

$$\mathrm{C}^{\mathrm{D}} = \mathit{Funt}(\mathrm{C}, \mathrm{D})$$

cuyos objetos son los funtores de la categoría C a la categoría D y cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre dichos funtores y la composición es la composición vertical. Con

$$\mathrm{End}(\mathrm{C})$$

denotaremos la categoría de endofuntores de C.

Teorema

Sean F, G funtores de la categoria C a la categoría D y sean F′, G′ funtores de la categoría D a la categoría E. Sean $\alpha : \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G}$, $\beta : \mathsf{F}' \Rightarrow \mathsf{G}'$ transformaciones naturales. Entonces, la familia de morfismos

$$\{(\beta * \alpha)_V : (F' \circ F)(V) \to (G' \circ G)(V)\}_{V \in |\mathsf{C}|}$$

en E definida por

$$(\beta * \alpha)_V = \mathsf{G}'(\alpha_V) \circ \beta_{\mathsf{F}(V)}$$

es una transformación natural denotada por $\beta * \alpha : \mathsf{F}' \circ \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G}' \circ \mathsf{G}$ y llamada la composición horizontal de α y β.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Teorema

Sean F, G funtores de la categoria C a la categoría D y sean F′, G′ funtores de la categoría D a la categoría E. Sean $\alpha : \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G}$, $\beta : \mathsf{F}' \Rightarrow \mathsf{G}'$ transformaciones naturales. Entonces, la familia de morfismos

$$\{(\beta * \alpha)_V : (F' \circ F)(V) \to (G' \circ G)(V)\}_{V \in |\mathsf{C}|}$$

en E definida por

$$(\beta * \alpha)_V = \mathsf{G}'(\alpha_V) \circ \beta_{\mathsf{F}(V)}$$

es una transformación natural denotada por $\beta * \alpha : \mathsf{F}' \circ \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G}' \circ \mathsf{G}$ y llamada la composición horizontal de α y β.

Nótese que por la naturalidad de β tenemos que

$$(\beta * \alpha)_V = \beta_{G(V)} \circ F'(\alpha_V).$$

La composición horizontal es asociativa y si id_{C} es el funtor identidad de C e $id_{\mathrm{id}_{\mathsf{C}}}$ es la transformación natural identidad, se tiene que

$$id_{\mathrm{id}_{\mathsf{C}}} * \alpha = \alpha = \alpha * id_{\mathrm{id}_{\mathsf{C}}}.$$

Es más, tenemos que

$$(id_{\mathsf{F}'} * \alpha)_V = \mathsf{F}'(\alpha_V)$$

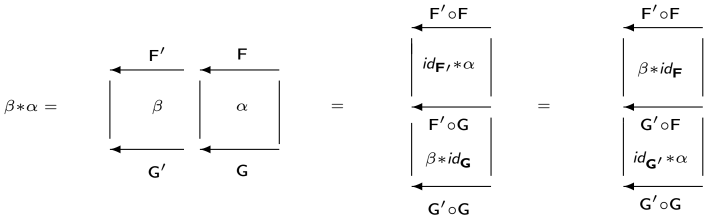
y

$$(\beta * id_{\mathsf{F}})_V = \beta_{\mathsf{F}(V)}.$$

Como consecuencia

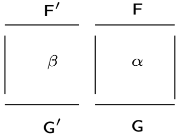
$$\beta * \alpha = (\beta * id_{\mathsf{G}}) \bullet (id_{\mathsf{F}'} * \alpha) = (id_{\mathsf{G}'} * \alpha) \bullet (\beta * id_{\mathsf{F}}).$$

En otras palabras:

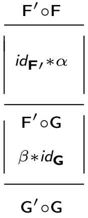


o

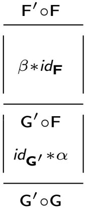
$\beta * \alpha =$


F'
F
β
α
G'
G

$=$

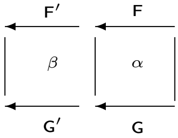

$F' \circ F$
$id_{F'} * \alpha$
$F' \circ G$
$\beta * id_G$
$G' \circ G$

$=$

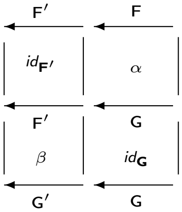

$F' \circ F$
$\beta * id_F$
$G' \circ F$
$id_{G'} * \alpha$
$G' \circ G$

Entonces,

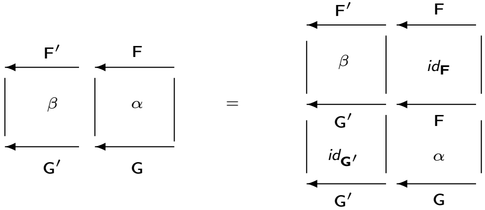
$\beta * \alpha \quad =$



$=$



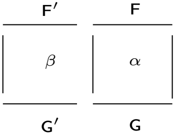
$\beta * \alpha \quad =$



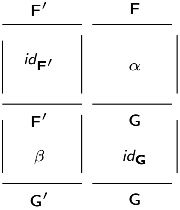
Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Equivalentemente,

$\beta * \alpha \quad =$

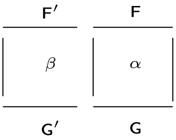


$=$

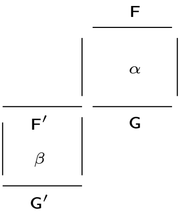


Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

$\beta * \alpha \quad =$



$=$



Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

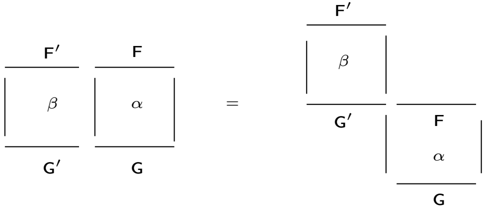
y

$$\beta * \alpha \quad = \quad \begin{array}{cc} \mathsf{F}' & \mathsf{F} \\ \boxed{\quad \beta \quad} & \boxed{\quad \alpha \quad} \\ \mathsf{G}' & \mathsf{G} \end{array} \quad = \quad \begin{array}{cc} \mathsf{F}' & \mathsf{F} \\ \boxed{\quad \beta \quad} & \boxed{\quad id_{\mathsf{F}} \quad} \\ \mathsf{G}' & \mathsf{F} \\ \boxed{\quad id_{\mathsf{G}'} \quad} & \boxed{\quad \alpha \quad} \\ \mathsf{G}' & \mathsf{G} \end{array}$$

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

o

$\beta * \alpha \quad =$



Definición

Sea $\mathsf{F} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un funtor. Diremos que F es una equivalencia de categorías si existe un funtor $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ e isomorfismos naturales $\eta : \mathrm{id}_{\mathsf{D}} \Rightarrow \mathsf{F} \circ \mathsf{G}$ y $\theta : \mathsf{G} \circ \mathsf{F} \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{C}}$.

Definición

Sea $\mathsf{F} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un funtor. Diremos que F es una equivalencia de categorías si existe un funtor $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ e isomorfismos naturales $\eta : \mathrm{id}_{\mathsf{D}} \Rightarrow \mathsf{F} \circ \mathsf{G}$ y $\theta : \mathsf{G} \circ \mathsf{F} \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{C}}$.

Definición

Sea $\mathsf{F} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un funtor. Diremos que F es esencialmente sobreyectivo si para cada $W \in |\mathsf{D}|$, existe $X \in |\mathsf{C}|$ tal que W y $\mathsf{F}(X)$ son isomorfos en D. Se dirá que es fiel (resp. plenamente fiel) si para cada par (X, Y) de objetos de C, la aplicación

$$Hom_{\mathsf{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathsf{D}}(\mathsf{F}(X), \mathsf{F}(Y))$$

es inyectiva (resp. biyectiva).

Teorema

Un funtor $F : C \to D$ es una equivalencia de categorías si, y sólo si, F es esencialmente sobreyectivo y plenamente fiel.

Teorema

Un funtor $F : C \to D$ es una equivalencia de categorías si, y sólo si, F es esencialmente sobreyectivo y plenamente fiel.

Definición

Sea $F : C \to D$ un funtor. Se dice que F es un isomorfismo de categorías si existe un funtor $G : D \to C$ tal que $F \circ G = id_D$ y $G \circ F = id_C$.

Teorema

Un funtor $F : C \to D$ es una equivalencia de categorías si, y sólo si, F es esencialmente sobreyectivo y plenamente fiel.

Definición

Sea $F : C \to D$ un funtor. Se dice que F es un isomorfismo de categorías si existe un funtor $G : D \to C$ tal que $F \circ G = id_D$ y $G \circ F = id_C$.

Claramente, categorías isomorfas son equivalentes. Lo inverso no se tiene en general.

Ejemplo

- Si C es una categoría y E es una subcategoría de C tal que cualquier objeto de C es isomorfo a un objeto de E y tal que

$$Hom_{\mathsf{E}}(V, W) = Hom_{\mathsf{C}}(V, W)$$

para todos $V, W \in |\mathsf{E}|$, entonces la inclusión i_{E} de E en C es una equivalencia de categorías. En general no es un isomorfismo.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Definición

Sean $\mathsf{F} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ y $\mathsf{G} : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ funtores. Se dice que F es adjunto por la izquierda de G (o que G es adjunto por la derecha de F), denotado por

$$F \dashv G,$$

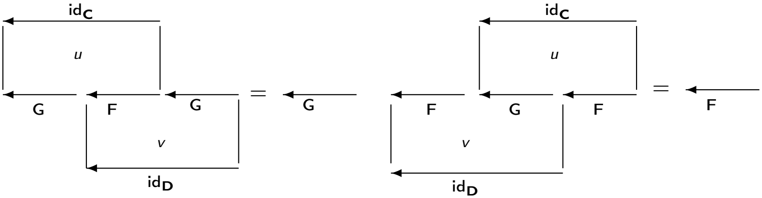
si existen dos transformaciones naturales $u : id_{\mathsf{C}} \Rightarrow \mathsf{G} \circ \mathsf{F}$ (unidad) y $v : \mathsf{F} \circ \mathsf{G} \Rightarrow id_{\mathsf{D}}$ (counidad) tales que:

$$v_{\mathsf{F}(V)} \circ \mathsf{F}(u_V) = id_{\mathsf{F}(V)},$$

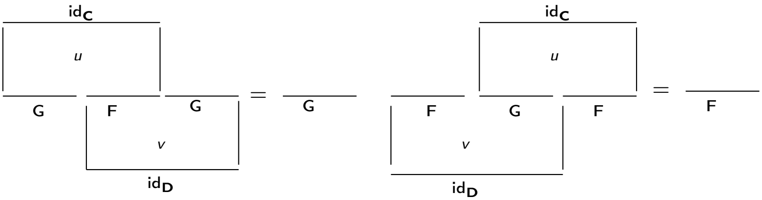
$$\mathsf{G}(v_W) \circ u_{\mathsf{G}(W)} = id_{\mathsf{G}(W)}.$$

para cualquier par de objetos $V \in |\mathsf{C}|$ y $W \in |\mathsf{D}|$.

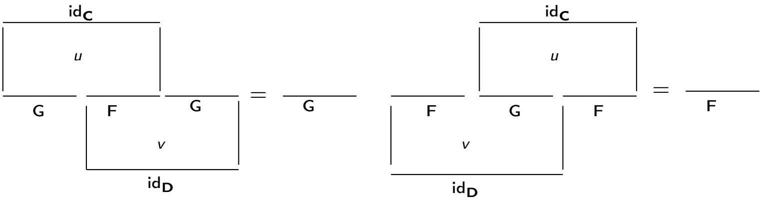
Teniendo en cuenta la notación bidimensional introducida en la sección anterior, un par adjunto (F, G, u, v) está dado por dos funtores $F : C \to D$, $G : D \to C$ y transformaciones naturales $u : id_C \Rightarrow G \circ F$, $v : F \circ G \Rightarrow id_D$ tales que se satisfacen las igualdades:



Equivalentemente en forma reducida:



Equivalentemente en forma reducida:



Nótese que lo anterior también se puede escribir como,

$$(v * id_{\mathsf{F}}) \bullet (id_{\mathsf{F}} * u) = id_{\mathsf{F}}$$

y

$$(id_{\mathsf{G}} * v) \bullet (u * id_{\mathsf{G}}) = id_{\mathsf{G}},$$

respectivamente.

Teorema

Sean $\mathsf{F} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ y $\mathsf{G} : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ funtores. Entonces F es adjunto por la izquierda de G si, y sólo si, para todos $V \in |\mathsf{C}|$ y $W \in |\mathsf{D}|$ existe una biyección natural

$$\omega_{V,W} : Hom_{\mathsf{C}}(V, \mathsf{G}(W)) \to Hom_{\mathsf{D}}(\mathsf{F}(V), W).$$

Teorema

Sean $\mathrm{F} : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ y $\mathrm{G} : \mathrm{D} \to \mathrm{C}$ funtores. Entonces F es adjunto por la izquierda de G si, y sólo si, para todos $V \in |\mathrm{C}|$ y $W \in |\mathrm{D}|$ existe una biyección natural

$$\omega_{V,W} : Hom_{\mathrm{C}}(V, \mathrm{G}(W)) \to Hom_{\mathrm{D}}(\mathrm{F}(V), W).$$

Teorema

Sean $\mathrm{F} : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ y $\mathrm{G} : \mathrm{D} \to \mathrm{C}$ funtores. Entonces si F es adjunto por la izquierda de G se tiene que F conserva coigualadores y G conserva igualadores.

Ejemplo

Sea R un anillo conmutativo. Si M es un R-módulo por la izquierda, tenemos la adjunción

$$- \otimes_R M \dashv Hom_R(M, -)$$

donde

$$\omega_{X,Y} : Hom_R(X, Hom_R(M, Y)) \to Hom_R(X \otimes_R M, Y)$$

está definida por

$$\omega_{X,Y}(f)(x \otimes m) = f(x)(m),$$

y

$$[\omega_{X,Y}^{-1}(g)(x)](m) = g(x \otimes m).$$

Teorema

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) F : C $\to$ D es una equivalencia de categorías.

ii) Existe un funtor G : D $\to$ C tal que $F \dashv G$ y la unidad y la counidad de la adjunción son isomorfismos naturales.

iii) Existe un funtor H : D $\to$ C tal que $H \dashv F$ y la unidad y la counidad de la adjunción son isomorfismos naturales.

Teorema

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $\mathsf{F} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ es una equivalencia de categorías.

ii) Existe un funtor $\mathsf{G} : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ tal que $F \dashv G$ y la unidad y la counidad de la adjunción son isomorfismos naturales.

iii) Existe un funtor $\mathsf{H} : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ tal que $H \dashv F$ y la unidad y la counidad de la adjunción son isomorfismos naturales.

En las condiciones del resultado previo $\mathsf{H} = \mathsf{G} : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ and $\mathsf{G} \dashv \mathsf{F} \dashv \mathsf{G}$.

 Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Definición

Se define el producto de dos categorías C y D como la categoría denotada por

$$\mathsf{C} \times \mathsf{D}$$

cuyos objetos son pares de objetos (V, W) con $V \in |\mathsf{C}|$, $W \in |\mathsf{D}|$ y cuyos morfismos están dados por

$$Hom_{\mathsf{C}\times\mathsf{D}}((V, W), (V', W')) = Hom_{\mathsf{C}}(V, V') \times Hom_{\mathsf{D}}(W, W').$$

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Definición

Un funtor tensorial (funtor producto tensor) en C es un funtor

$$\otimes : C \times C \to C.$$

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Definición

Un funtor tensorial (funtor producto tensor) en C es un funtor

$$\otimes : \mathrm{C} \times \mathrm{C} \to \mathrm{C}.$$

Nótese que esto implica que:

- Para todo par (V, W) de objetos en C tenemos un objeto $V \otimes W \in |\mathrm{C}|$.
- Para cada par de morfismos (f, g) en C tenemos un morfismo $f \otimes g$ en C tal que su dominio es el producto tensor de los dominios de f y g y lo mismo ocurre con sus codominios.
- If f y f' son morfismos componibles en C y lo mismo ocurre con g y g', se tiene que

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = ((f' \circ f) \otimes (g' \circ g)).$$

- $id_{V \otimes W} = id_V \otimes id_W$.

Nótese que, si $\otimes$ es un funtor producto tensor, para todo $V \in |\mathsf{C}|$,

$$- \otimes V : \mathsf{C} \to \mathsf{C}, \quad V \otimes - : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$$

son endofuntores. Por ejemplo, $- \otimes V : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ está definido por

$$(- \otimes V)(X) = X \otimes V$$

en objetos y por

$$(- \otimes V)(f) = f \otimes id_V$$

en morfismos.

Nótese que, si $\otimes$ es un funtor producto tensor, para todo $V \in |\mathsf{C}|$,

$$- \otimes V : \mathsf{C} \to \mathsf{C}, \quad V \otimes - : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$$

son endofuntores. Por ejemplo, $- \otimes V : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ está definido por

$$(- \otimes V)(X) = X \otimes V$$

en objetos y por

$$(- \otimes V)(f) = f \otimes id_V$$

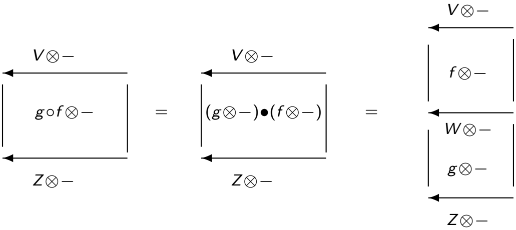
en morfismos.

También, si $f : V \to W$ es un morfismo en C,

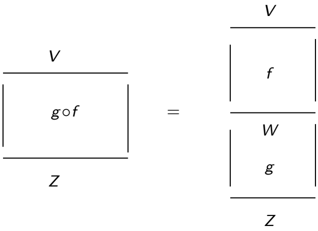
$$- \otimes f : - \otimes V \Rightarrow - \otimes W, \quad f \otimes - : V \otimes - \Rightarrow W \otimes -$$

son transformaciones naturales. Por ejemplo, $(f \otimes -)_X = f \otimes id_X$.

Entonces, dados dos morfismos $f : V \to W$ y $g : W \to Z$, se tiene que:



o, de forma reducida,



Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Por otro lado, si $f : V \to W$, $g : V' \to W'$ son morfismos en C, para las correspondientes transformaciones naturales

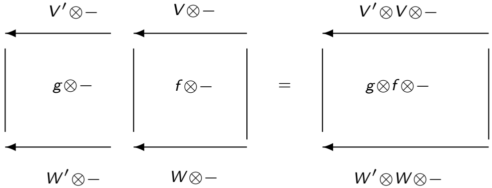
$$f \otimes - : V \otimes - \Rightarrow W \otimes -, \quad g \otimes - : V' \otimes - \Rightarrow W' \otimes -,$$

se tiene que

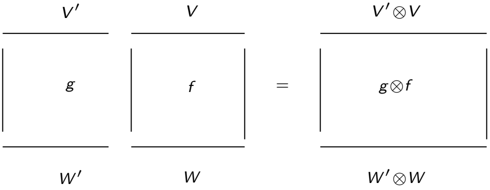
$$((g \otimes -) * (f \otimes -))_X = (g \otimes f \otimes -)_X.$$

Equivalentemente,

$$(g\otimes -)*(f\otimes -) \quad =$$



o, en versión reducida,



Definición

Sea C una categoría con un funtor producto tensor $\otimes$. Una restricción de asociatividad para $\otimes$ es un isomorfismo natural

$$a : \otimes \circ (\otimes \times \mathrm{id}_{\mathsf{C}}) \Rightarrow \otimes \circ (\mathrm{id}_{\mathsf{C}} \times \otimes).$$

Entonces, para todo triple (U, V, W) de objetos en C, existe un isomorfismo

$$a_{U,V,W} : (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W)$$

tal que si $f : U \to U'$, $g : V \to V'$, $h : W \to W'$ son morfismos en C,

$$(f \otimes (g \otimes h)) \circ a_{U,V,W} = a_{U',V',W'} \circ ((f \otimes g) \otimes h).$$

Definición

Sea C una categoría con un funtor producto tensor $\otimes$. Una restricción de asociatividad para $\otimes$ es un isomorfismo natural

$$a : \otimes \circ (\otimes \times \mathrm{id}_C) \Rightarrow \otimes \circ (\mathrm{id}_C \times \otimes).$$

Entonces, para todo triple (U, V, W) de objetos en C, existe un isomorfismo

$$a_{U,V,W} : (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W)$$

tal que si $f : U \to U'$, $g : V \to V'$, $h : W \to W'$ son morfismos en C,

$$(f \otimes (g \otimes h)) \circ a_{U,V,W} = a_{U',V',W'} \circ ((f \otimes g) \otimes h).$$

Definición

La restricción de asociatividad a satisface el *Axioma del Pentágono* si

$$(id_U \otimes a_{V,W,X}) \circ a_{U,V\otimes W,X} \circ (a_{U,V,W} \otimes id_X) = a_{U,V,W\otimes X} \circ a_{U\otimes V,W,X},$$

se cumple para todos $U, V, W, X \in C$.

Nosotros podemos escribir el axioma anterior de una forma más sencilla identificando las identidades en objetos con el propio objeto. Por lo tanto, a partir de este monmento, dados M, N, P objetos en C y un morfismo en $f : M \to N$ en la misma categoría, escribiremos $P \otimes f$ para designar a $id_P \otimes f$ y, de la misma forma, $f \otimes P$ designará a $f \otimes id_P$. Como consecuencia, el Axioma del Pentágono queda como:

$$(U \otimes a_{V,W,X}) \circ a_{U,V\otimes W,X} \circ (a_{U,V,W} \otimes X) = a_{U,V,W\otimes X} \circ a_{U\otimes V,W,X}.$$

Definición

Fijado un objeto K en una categoría C con producto tensor $\otimes$, una restricción de unidad por la izquierda respecto de K es un isomorfismo natural

$$l : \otimes \circ (K \times \mathrm{id}_{\mathsf{C}}) \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{C}}.$$

Esto implica que para todo objeto $V \in |\mathsf{C}|$ existe un isomorfismo

$$l_V : K \otimes V \to V$$

tal que, para todo morfismo $f : V \to W$ en C, se cumple la siguiente identidad:

$$l_W \circ (K \otimes f) = f \circ l_V.$$

Definición

Fijado un objeto K en una categoría C con producto tensor $\otimes$, una restricción de unidad por la derecha respecto de K es un isomorfismo natural

$$r : \otimes \circ (\mathrm{id}_{\mathsf{C}} \times K) \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{C}}.$$

Esto implica que para todo objeto $V \in |\mathsf{C}|$ existe un isomorfismo

$$r_V : V \otimes K \to V$$

tal que, para todo morfismo $f : V \to W$ en C, se cumple la siguiente identidad:

$$r_W \circ (f \otimes K) = f \circ r_V.$$

Definición

Sea C una categoría con un funtor producto tensor $\otimes$. Dadas una restricción de asociatividad a y restricciones de unidad l (izquierda) y r (derecha) respecto de un objeto K, diremos que se satisface el *Axioma del Triángulo* si

$$(V \otimes l_W) \circ a_{V,K,W} = r_V \otimes W,$$

se cumple para todos $V, W \in$ C.

Ejemplo

Sea R un anillo conmutativo. Sean M, N, P objetos en R-Mod. Entonces el isomorfismo

$$a_{M,N,P}((m \otimes n) \otimes p) = m \otimes (n \otimes p)$$

induce una restricción de asociatividad en R-Mod.
Las aplicaciones lineales

$$l_M : R \otimes_R M \to M, \; l_M(a \otimes m) = am,$$

$$r_M : M \otimes_R R \to M, \; r_M(m \otimes a) = ma,$$

son isomorfismos con inversos

$$l_M^{-1} : M \to R \otimes_R M, \; l_M^{-1}(m) = 1_R \otimes m,$$

$$r_M^{-1} : M \to M \otimes_R R, \; r_M^{-1}(m) = m \otimes 1_R,$$

que dan lugar a restricciones de unidad respecto de un objeto R por la izquierda y por la derecha respectivamente.

Definición

Una categoría monoidal (tensorial)

$$(\mathsf{C}, \otimes, K, a, l, r)$$

es una categoría C equipada con un funtor producto tensor $\otimes : \mathsf{C} \times \mathsf{C} \to \mathsf{C}$, con un objeto K, llamado unidad de C, con una restricción de asociatividad a, con una restricción de unidad por la izquierda respecto de K, denotada por l, y con una restricción de unidad por la derecha respecto de K, denotada por r, cumpliendo el Axioma del Pentágono y el Axioma del Triángulo.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Definición

Una categoría monoidal (tensorial)

$$(\mathsf{C}, \otimes, K, a, l, r)$$

es una categoría C equipada con un funtor producto tensor $\otimes : \mathsf{C} \times \mathsf{C} \to \mathsf{C}$, con un objeto K, llamado unidad de C, con una restricción de asociatividad a, con una restricción de unidad por la izquierda respecto de K, denotada por l, y con una restricción de unidad por la derecha respecto de K, denotada por r, cumpliendo el Axioma del Pentágono y el Axioma del Triángulo.

Definición

Una categoría monoidal se llamará estricta si sus restricciones son identidades.

Ejemplos

- Set, la categoría de conjuntos.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ejemplos

- Set, la categoría de conjuntos.
- $\mathbb{F}$-Vect, la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.

Ejemplos

- Set, la categoría de conjuntos.
- $\mathbb{F}$-Vect, la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.
- R-Mod, la categoría de módulos por la izquierda sobre un anillo conmutativo R.

Ejemplos

- Set, la categoría de conjuntos.
- $\mathbb{F}$-Vect, la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.
- R-Mod, la categoría de módulos por la izquierda sobre un anillo conmutativo R.
- Rep(G), la categoría de representaciones de un grupo G.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ejemplos

- Set, la categoría de conjuntos.
- $\mathbb{F}$-Vect, la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.
- R-Mod, la categoría de módulos por la izquierda sobre un anillo conmutativo R.
- Rep(G), la categoría de representaciones de un grupo G.
- H-Mod, la categoría de módulos por la izquierda para un álgebra de Hopf H.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ejemplos

- Set, la categoría de conjuntos.
- $\mathbb{F}$-Vect, la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.
- R-Mod, la categoría de módulos por la izquierda sobre un anillo conmutativo R.
- Rep(G), la categoría de representaciones de un grupo G.
- H-Mod, la categoría de módulos por la izquierda para un álgebra de Hopf H.
- ${}^{H}_{H}\mathrm{YD}$, la categoría de módulos Yetter-Drinfeld por la izquierda para un álgebra de Hopf H.

Ejemplos

- Set, la categoría de conjuntos.
- $\mathbb{F}$-Vect, la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.
- R-Mod, la categoría de módulos por la izquierda sobre un anillo conmutativo R.
- Rep(G), la categoría de representaciones de un grupo G.
- H-Mod, la categoría de módulos por la izquierda para un álgebra de Hopf H.
- ${}^{H}_{H}\mathrm{YD}$, la categoría de módulos Yetter-Drinfeld por la izquierda para un álgebra de Hopf H.
- Sea C una categoría. La categoría de endofuntores de C es un ejemplo de categoría monoidal estricta con la composición de funtores como producto tensor e id_{C} como unidad. Los morfismos en End(C) son transformaciones naturales entre endofuntores y su composición es la composición vertical $\bullet$. El producto tensor de morfismos en End(C) está definido por la composición horizontal $*$ de transformaciones naturales.

Definición

Sean $(\mathsf{C}, \otimes, K, a, l, r)$, $(\mathsf{D}, \otimes, I, a, l, r)$ categorías monoidales. Un funtor monoidal (funtor tensorial) de C a D es una terna

$$(\mathsf{F}, \Phi_0, \Phi_{-,-})$$

donde $\mathsf{F} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ es un funtor, $\Phi_0 : I \to \mathsf{F}(K)$ es un isomorfismo y $\Phi_{-,-}$ es una familia de isomorfismos naturales indexados por los pares (U, V) en $\mathsf{C} \times \mathsf{C}$

$$\Phi_{-,-} = \{\Phi_{U,V} : \mathsf{F}(U) \otimes \mathsf{F}(V) \to \mathsf{F}(U \otimes W);\ U, V \in |\mathsf{C}|\}$$

tal que:

$$\Phi_{U,V\otimes W} \circ (\mathsf{F}(U) \otimes \Phi_{V,W}) \circ a_{\mathsf{F}(U),\mathsf{F}(V),\mathsf{F}(W)} = \mathsf{F}(a_{U,V,W}) \circ \Phi_{U\otimes V,W} \circ (\Phi_{U,V} \otimes \mathsf{F}(W)),$$

$$\mathsf{F}(l_u) \circ \Phi_{K,U} \circ (\Phi_0 \otimes \mathsf{F}(U)) = l_{\mathsf{F}(U)},$$

$$\mathsf{F}(r_u) \circ \Phi_{U,K} \circ (\mathsf{F}(U) \otimes \Phi_0) = r_{\mathsf{F}(U)},$$

donde $U, V, W \in |\mathsf{C}|$.

Definición

Sean $(\mathsf{C}, \otimes, K, a, l, r)$, $(\mathsf{D}, \otimes, I, a, l, r)$ categorías monoidales y sean $(\mathsf{F}, \Phi_0, \Phi_{-,-})$, $(\mathsf{F}', \Phi'_0, \Phi'_{-,-})$ funtores monoidales de C a D. Una transformación monoidal natural

$$\eta : (\mathsf{F}, \Phi_0, \Phi_{-,-}) \Rightarrow (\mathsf{F}', \Phi'_0, \Phi'_{-,-})$$

es una transformación natural $\eta : \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{F}'$ tal que para todo par de objetos (U, V) en C se cumple que

$$\eta_K \circ \Phi_0 = \Phi'_0,$$

$$\Phi'_{U,V} \circ (\eta_U \otimes \eta_V) = \eta_{U \otimes V} \circ \Phi_{U,V}.$$

Definición

Un isomorfismo natural monoidal es una transformación monoidal natural tal que es un isomorfismo natural.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Definición

Un isomorfismo natural monoidal es una transformación monoidal natural tal que es un isomorfismo natural.

Definición

Una equivalencia monoidal entre categorías monoidales es un funtor monoidal $\mathsf{F} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ tal que existe un funtor monoidal $\mathsf{G} : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ e isomorfismos naturales monoidales $\eta : \mathsf{id}_{\mathsf{D}} \Rightarrow \mathsf{F} \circ \mathsf{G}$ y $\theta : \mathsf{G} \circ \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{id}_{\mathsf{C}}$.

Definición

Un isomorfismo natural monoidal es una transformación monoidal natural tal que es un isomorfismo natural.

Definición

Una equivalencia monoidal entre categorías monoidales es un funtor monoidal $\mathsf{F} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ tal que existe un funtor monoidal $\mathsf{G} : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ e isomorfismos naturales monoidales $\eta : \mathrm{id}_{\mathsf{D}} \Rightarrow \mathsf{F} \circ \mathsf{G}$ y $\theta : \mathsf{G} \circ \mathsf{F} \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{C}}$.

Definición

Si existe una equivalencia monoidal entre C y D diremos que C y D son monoidalmente equivalentes.

Teorema

Dada C una categoría monoidal, existe una categoría monoidal estricta C^{str} que es monoidalmente equivalente a C.

Teorema

Dada C una categoría monoidal, existe una categoría monoidal estricta C^{str} que es monoidalmente equivalente a C.

Como consecuencia del teorema anterior, cuando trabajamos con categorías monoidales, podemos asumir sin pérdida de generalidad, que la categoría es estricta. En la práctica esto implica que podemos suponer que las restricciones son todas identidades.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Sea C una categoría con producto tensor $\otimes : C \times C \to C$ y una restricción de asociatividad a. Denotemos por $\tau : C \times C \to C \times C$ el funtor definido por $\tau(U, V) = (V, U)$ para todo par de objetos en la categoría y por $\tau(f, g) = (g, f)$ para todo par de morfismos en C. Una restricción de conmutatividad c es un isomorfismo natural

$$c : \otimes \Rightarrow \otimes \circ \tau.$$

Esto significa, que para todo par (V, W) de objetos en C, tenemos un isomorfismo

$$c_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$$

tal que

$$(g \otimes f) \circ c_{V,W} = c_{V',W'} \circ (f \otimes g)$$

para todos morfismos $f : V \to V'$ y $g : W \to W'$. Por lo tanto tenemos dos isomorfismos naturales

$$c_{V,-} : V \otimes - \Rightarrow - \otimes V, \quad c_{-,W} : - \otimes W \Rightarrow W \otimes -.$$

Diremos que la restricción de conmutatividad satisface el *Axioma del Hexágono* si

$$(V \otimes c_{U,W}) \circ a_{V,U,W} \circ (c_{U,V} \otimes W) = a_{V,W,U} \circ c_{U,V\otimes W} \circ a_{U,V,W},$$

y

$$a^{-1}_{W,U,V} \circ c_{U\otimes V,W} \circ a^{-1}_{U,V,W} = (c_{V,W} \otimes W) \circ a^{-1}_{U,W,V} \circ (U \otimes c_{V,W}),$$

se cumplen para todos $U, V, W \in |\mathsf{C}|$.

Definition.

Sae $(\mathsf{C}, \otimes, K, a, l, r)$ una categoría monoidal. Una trenza en C es una restricción de conmutatividad cumpliendo el Axioma del Hexágono. Una categoría monoidal trenzada es una categoría monoidal dotada de una trenza c. La denotaremos como

$$(\mathsf{C}, \otimes, K, a, l, r, c).$$

Nótese que, si C es estricta, el Axioma del Hexágono se reduce a

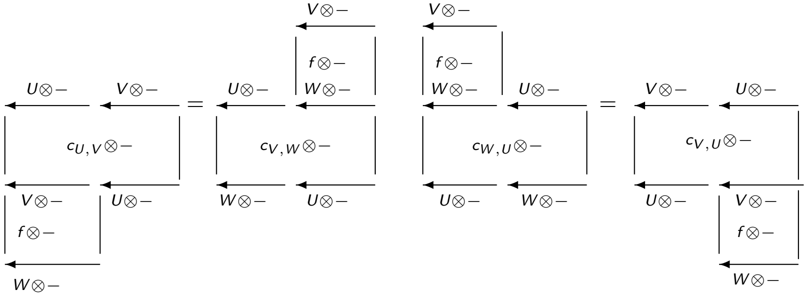
$$c_{U,V\otimes W} = (V \otimes c_{U,W}) \circ (c_{U,V} \otimes W),$$

y

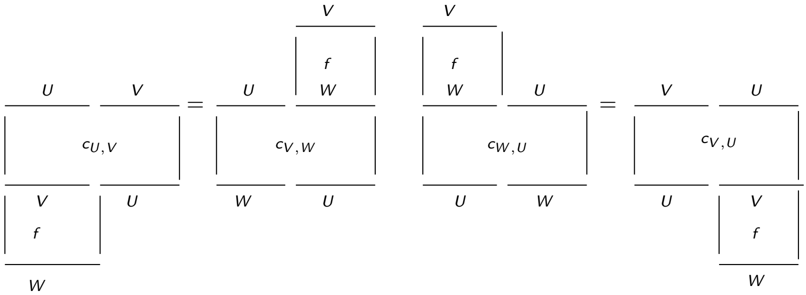
$$c_{U\otimes V,W} = (c_{U,W} \otimes W) \circ (U \otimes c_{V,W}) :$$

Si $(\mathsf{C}, \otimes, K, a, l, r, c)$ es una categoría monoidal trenzada y $c_{V,U} \circ c_{U,V} = id_{U\otimes V}$, para todos U, V in $|\mathsf{C}|$, diremos que $(\mathsf{C}, \otimes, K, a, l, r, c)$ es una categoría monoidal simétrica.

Teniendo en cuenta que para cada morfismo $f : V \to W$ tenemos dos transformaciones naturales $f \otimes - : V \otimes - \to W \otimes -$ y $- \otimes f : - \otimes V \to - \otimes W$, en contexto estricto, la naturalidad de $c_{U,V} \otimes -$ queda expresada como:

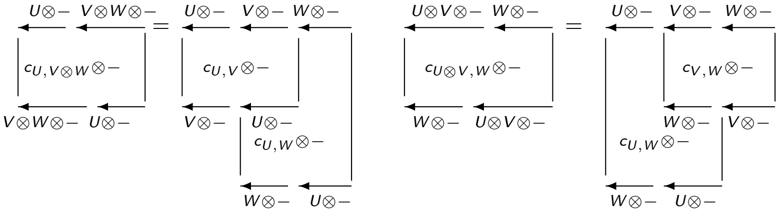


o por

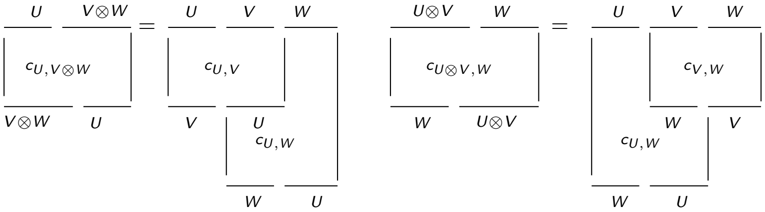


De forma análoga podemos expresar la naturalidad de $-\otimes c_{V,U}$, $c_{U,V}^{-1}\otimes -$ y $-\otimes c_{V,U}^{-1}$.

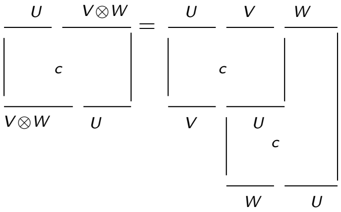
Con este lenguaje el Axioma del Hexágono queda como

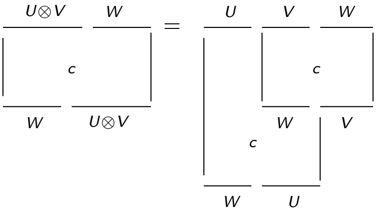


o en forma reducida

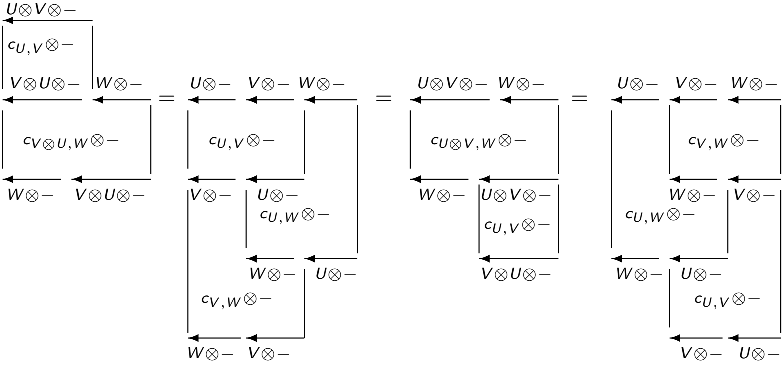


Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

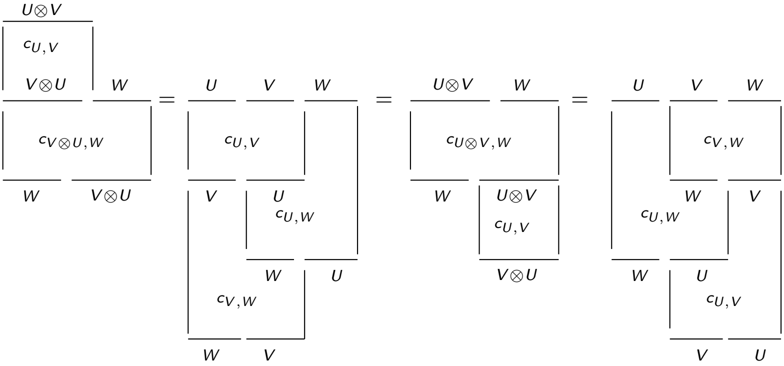

U
V⊗W
c
V⊗W
U
=
U
V
W
c
V
U
c
W
U

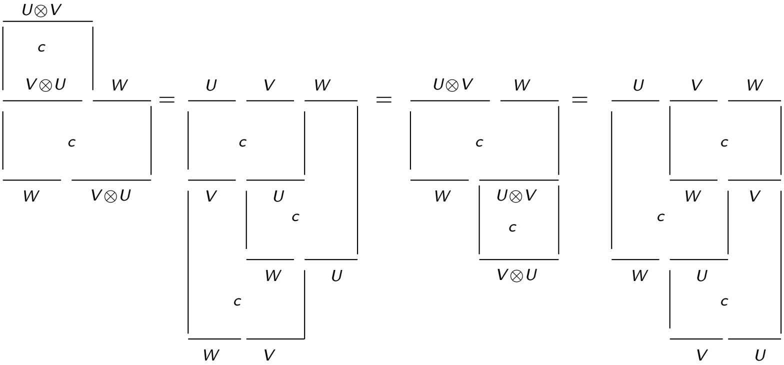

U⊗V
W
c
W
U⊗V
=
U
V
W
c
W
V
c
W
U

Además la naturalidad de $c_{U\otimes V,W}\otimes -$ implica la identidad (conocida como la identidad de *Yang-Baxter*):



o también


$U \otimes V$
$c_{U,V}$
$V \otimes U$
W
$c_{V \otimes U, W}$
W
$V \otimes U$
=
U
V
W
$c_{U,V}$
V
U
$c_{U,W}$
W
U
$c_{V,W}$
W
V
=
$U \otimes V$
W
$c_{U \otimes V, W}$
W
$U \otimes V$
$c_{U,V}$
$V \otimes U$
=
U
V
W
$c_{V,W}$
W
V
$c_{U,W}$
W
U
$c_{U,V}$
V
U


U⊗V
c
V⊗U
W
c
W
V⊗U
=
U
V
W
c
V
U
c
W
U
c
W
V
=
U⊗V
W
c
W
U⊗V
c
V⊗U
=
U
V
W
c
W
V
c
W
U
c
V
U

Entonces, la forma lineal de la identidad de Yang-Baxter es en el caso estricto

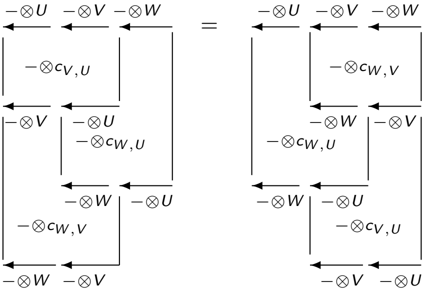
$$(c_{V,W} \otimes U) \circ (V \otimes c_{U,W}) \circ (c_{U,V} \otimes W) = (W \otimes c_{U,V}) \circ (c_{U,W} \otimes V) \circ (U \otimes c_{V,W}).$$

y en el no estricto

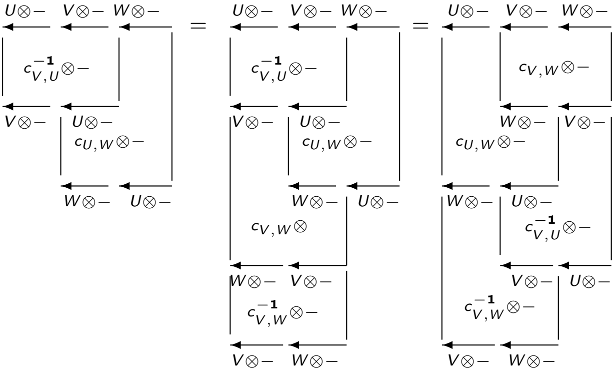
$$a_{W,V,U} \circ (c_{V,W} \otimes U) \circ a^{-1}_{V,W,U} \circ (V \otimes c_{U,W}) \circ a_{V,U,W} \circ (c_{U,V} \otimes W)$$

$$= (W \otimes c_{U,V}) \circ a_{W,U,V} \circ (c_{U,W} \otimes V) \circ a^{-1}_{U,W,V} \circ (U \otimes c_{V,W}) \circ a_{U,V,W}.$$

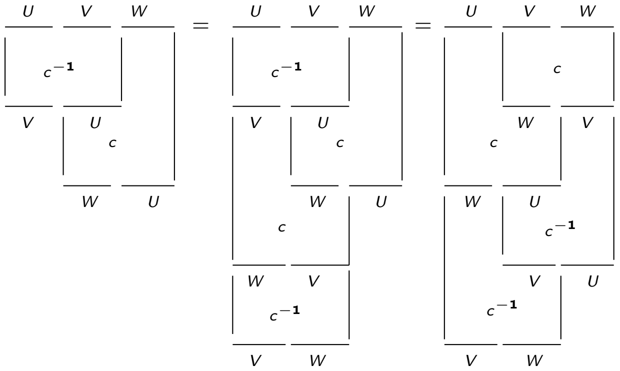
De forma análoga podemos trabajar con los funtores $-\otimes U$ obteniendo igualdades similares:



Por otro lado, gracias a la naturalidad, tenemos la identidad



que admite la versión más simple:



y similarmente se obtiene igualdades similares cuando se cambia c por c^{-1} y $c_{-,-} \otimes -$ por $- \otimes c_{-,-}$.

Ejemplos

- Set, la categoría de conjuntos.

Ejemplos

- Set, la categoría de conjuntos.
- $\mathbb{F}$-Vect, la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.

Ejemplos

- Set, la categoría de conjuntos.
- $\mathbb{F}$-Vect, la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.
- R-Mod, la categoría de módulos por la izquierda sobre un anillo conmutativo R.

Ejemplos

- Set, la categoría de conjuntos.
- $\mathbb{F}$-Vect, la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.
- R-Mod, la categoría de módulos por la izquierda sobre un anillo conmutativo R.
- Rep(G), la categoría de representaciones de un grupo G.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ejemplos

- Set, la categoría de conjuntos.
- $\mathbb{F}$-Vect, la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.
- R-Mod, la categoría de módulos por la izquierda sobre un anillo conmutativo R.
- Rep(G), la categoría de representaciones de un grupo G.
- H-Mod, la categoría de módulos por la izquierda para un álgebra de Hopf quasi-triangular H.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ejemplos

- Set, la categoría de conjuntos.
- $\mathbb{F}$-Vect, la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.
- R-Mod, la categoría de módulos por la izquierda sobre un anillo conmutativo R.
- Rep(G), la categoría de representaciones de un grupo G.
- H-Mod, la categoría de módulos por la izquierda para un álgebra de Hopf quasi-triangular H.
- ${}^{H}_{H}$YD, la categoría de módulos Yetter-Drinfeld por la izquierda para un álgebra de Hopf H con antípoda biyectiva.

Teorema

Si $(C, \otimes, K, a, l, r, c)$ es una categoría monoidal trenzada, para todo V de C se cumple lo siguiente:

$$l_V \circ c_{V,K} = r_V, \quad r_V \circ c_{K,V} = l_V, \quad c_{V,K} = c_{K,V}^{-1}.$$

Por lo tanto, si la categoría es estricta, se tiene que $c_{V,K} = c_{K,V} = id_V$

Teorema

Si $(\mathrm{C}, \otimes, K, a, l, r, c)$ es una categoría monoidal trenzada, para todo V de C se cumple lo siguiente:

$$l_V \circ c_{V,K} = r_V, \quad r_V \circ c_{K,V} = l_V, \quad c_{V,K} = c_{K,V}^{-1}.$$

Por lo tanto, si la categoría es estricta, se tiene que $c_{V,K} = c_{K,V} = id_V$

Teorema

Si $(\mathrm{C}, \otimes, K, a, l, r, c)$ es una categoría monoidal trenzada, $(\mathrm{C}, \otimes, K, a, l, r, c^{-1})$ también lo es.

Teorema

Si $(\mathsf{C}, \otimes, K, a, l, r, c)$ es una categoría monoidal trenzada, para todo V de C se cumple lo siguiente:

$$l_V \circ c_{V,K} = r_V, \quad r_V \circ c_{K,V} = l_V, \quad c_{V,K} = c_{K,V}^{-1}.$$

Por lo tanto, si la categoría es estricta, se tiene que $c_{V,K} = c_{K,V} = id_V$

Teorema

Si $(\mathsf{C}, \otimes, K, a, l, r, c)$ es una categoría monoidal trenzada, $(\mathsf{C}, \otimes, K, a, l, r, c^{-1})$ también lo es.

Definición

Sean $(\mathsf{C}, \otimes, K, a, l, r, c)$, $(\mathsf{D}, \otimes, I, a, l, r, b)$ categorías monoidales trenzadas. Un funtor monoidal $(\mathsf{F}, \Phi_0, \Phi_{-,-})$ de C a D es trenzado si, para todo par de objetos (U, V) de C, se cumple lo siguiente:

$$\Phi_{V,U} \circ b_{\mathsf{F}(U),\mathsf{F}(V)} = \mathsf{F}(c_{U,V}) \circ \Phi_{U,V}.$$

Referencias.

- J.N. Alonso Alvarez, J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, M.P. López López y E. Villanueva Novoa: A Picard-Brauer five term exact sequence for braided categories, en Rings, Hopf Algebras and Brauer Groups, eds. S. Caenepeel, A. Verschoren. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics (Blue Series), Marcel Dekker Inc., 197, 11-41, 1998.
- J.C. Baez, M. Stay: Physics, topology, logic and computation: A Rosetta stone, arXiv:0903.0340 (2009).
- F. Borceux: Handbook of categorical algebra. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 50-52. Cambridge University Press (1994).
- C. Kassel: Quantum Groups, GTM 155, Springer-Verlag, New York, 1995.
- S. Mac Lane: Categories for the working mathematician, GTM 5, Springer-Verlag, New-York, 1971.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles