Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ramón González Rodríguez

CENTRO DE INVESTIGACIÓN E TECNOLOXÍA MATEMÁTICA DE GALICIA

Universidade de Vigo

Escuela de la Red de Álgebra no Conmutativa (Nc-Alg)

PARTE 2: Cuasigrupoides

Almería, 8-12 de julio de 2024

GOBIERNO DE ESPAÑA MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN

Ministerio de Ciencia e Innovación. Agencia Estatal de Investigación
Unión Europea – Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER)
RED2022-134631-T

Índice

Cuasigrupoides

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Definición

Un cuasigrupoide A es un par ordenado de conjuntos $A = (A_0, A_1)$ tal que:

Definición

Un cuasigrupoide A es un par ordenado de conjuntos $A = (A_0, A_1)$ tal que:

(1) Existen aplicaciones $s_A : A_1 \to A_0$, $t_A : A_1 \to A_0$ e $id_A : A_0 \to A_1$, llamadas dominio, codominio e identidad, respectivamente, cumpliendo

$$s_A(id_A(x)) = t_A(id_A(x)) = x, \quad \forall\, x \in A_0.$$

Definición

Un cuasigrupoide A es un par ordenado de conjuntos $\mathsf{A} = (\mathsf{A}_0, \mathsf{A}_1)$ tal que:

(1) Existen aplicaciones $s_{\mathsf{A}} : \mathsf{A}_1 \to \mathsf{A}_0$, $t_{\mathsf{A}} : \mathsf{A}_1 \to \mathsf{A}_0$ e $id_{\mathsf{A}} : \mathsf{A}_0 \to \mathsf{A}_1$, llamadas dominio, codominio e identidad, respectivamente, cumpliendo

$$s_{\mathsf{A}}(id_{\mathsf{A}}(x)) = t_{\mathsf{A}}(id_{\mathsf{A}}(x)) = x, \ \ \forall\, x \in \mathsf{A}_0.$$

(2) Existe una aplicación, llamada producto de A,

$$\bullet : \mathsf{A}_1 \ {}_{s_{\mathsf{A}}}\!\times_{t_{\mathsf{A}}} \mathsf{A}_1 = \{(a,b) \in \mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_1 \ ; \ s_{\mathsf{A}}(a) = t_{\mathsf{A}}(b)\} \to \mathsf{A}_1,$$

definida por $\bullet(a,b) = a \bullet b$ y una aplicación $\lambda_{\mathsf{A}} : \mathsf{A}_1 \to \mathsf{A}_1$, llamada aplicación de inversión, tales que:

Definición

Un cuasigrupoide A es un par ordenado de conjuntos $A = (A_0, A_1)$ tal que:

(1) Existen aplicaciones $s_A : A_1 \to A_0$, $t_A : A_1 \to A_0$ e $id_A : A_0 \to A_1$, llamadas dominio, codominio e identidad, respectivamente, cumpliendo

$$s_A(id_A(x)) = t_A(id_A(x)) = x, \ \ \forall\, x \in A_0.$$

(2) Existe una aplicación, llamada producto de A,

$$\bullet : A_1 \ {}_{s_{\mathbf{A}}}\!\times_{t_{\mathbf{A}}} A_1 = \{(a, b) \in A_1 \times A_1 \ ; \ s_A(a) = t_A(b)\} \to A_1,$$

definida por $\bullet(a, b) = a \bullet b$ y una aplicación $\lambda_A : A_1 \to A_1$, llamada aplicación de inversión, tales que:

(2-1) Para cada $a \in A_1$,

$$id_{\mathbf{A}}(t_{\mathbf{A}}(a)) \bullet a = a = a \bullet id_{\mathbf{A}}(s_{\mathbf{A}}(a)).$$

Definición

Un cuasigrupoide A es un par ordenado de conjuntos $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1)$ tal que:

(1) Existen aplicaciones $s_{\mathrm{A}} : \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_0$, $t_{\mathrm{A}} : \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_0$ e $id_{\mathrm{A}} : \mathrm{A}_0 \to \mathrm{A}_1$, llamadas dominio, codominio e identidad, respectivamente, cumpliendo

$$s_{\mathrm{A}}(id_{\mathrm{A}}(x)) = t_{\mathrm{A}}(id_{\mathrm{A}}(x)) = x, \quad \forall\, x \in \mathrm{A}_0.$$

(2) Existe una aplicación, llamada producto de A,

$$\bullet : \mathrm{A}_1 \ {}_{s_{\mathrm{A}}}\!\times_{t_{\mathrm{A}}} \mathrm{A}_1 = \{(a,b) \in \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_1 \ ; \ s_{\mathrm{A}}(a) = t_{\mathrm{A}}(b)\} \to \mathrm{A}_1,$$

definida por $\bullet(a,b) = a \bullet b$ y una aplicación $\lambda_{\mathrm{A}} : \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_1$, llamada aplicación de inversión, tales que:

(2-1) Para cada $a \in \mathbf{A_1}$,
$$id_{\mathbf{A}}(t_{\mathbf{A}}(a)) \bullet a = a = a \bullet id_{\mathbf{A}}(s_{\mathbf{A}}(a)).$$

(2-2) Para todo $(a,b) \in \mathbf{A_1} \ {}_{s_{\mathbf{A}}}\!\times_{t_{\mathbf{A}}} \mathbf{A_1}$,
$$s_{\mathbf{A}}(a \bullet b) = s_{\mathbf{A}}(b), \quad t_{\mathbf{A}}(a \bullet b) = t_{\mathbf{A}}(a).$$

Definición

Un cuasigrupoide A es un par ordenado de conjuntos $A = (A_0, A_1)$ tal que:

(1) Existen aplicaciones $s_A : A_1 \to A_0$, $t_A : A_1 \to A_0$ e $id_A : A_0 \to A_1$, llamadas dominio, codominio e identidad, respectivamente, cumpliendo

$$s_A(id_A(x)) = t_A(id_A(x)) = x, \quad \forall\, x \in A_0.$$

(2) Existe una aplicación, llamada producto de A,

$$\bullet : A_1 \,{}_{s_A}\!\times_{t_A} A_1 = \{(a, b) \in A_1 \times A_1 \; ; \; s_A(a) = t_A(b)\} \to A_1,$$

definida por $\bullet(a, b) = a \bullet b$ y una aplicación $\lambda_A : A_1 \to A_1$, llamada aplicación de inversión, tales que:

(2-1) Para cada $a \in A_1$,

$$id_A(t_A(a)) \bullet a = a = a \bullet id_A(s_A(a)).$$

(2-2) Para todo $(a, b) \in A_1 \,{}_{s_A}\!\times_{t_A} A_1$,

$$s_A(a \bullet b) = s_A(b), \quad t_A(a \bullet b) = t_A(a).$$

(2-3) Para todo $(a, b) \in A_1 \,{}_{s_A}\!\times_{t_A} A_1$, $(\lambda_A(a), a \bullet b)$ y $(a \bullet b, \lambda_A(b))$ pertenecen a $A_1 \,{}_{s_A}\!\times_{t_A} A_1$ y

$$\lambda_A(a) \bullet (a \bullet b) = b, \quad (a \bullet b) \bullet \lambda_A(b) = a.$$

Los cuasigrupoides son casos particulares de los *inverse semiloopoids* introducidos por J. Grabowski en:

- **J. Grabowski:** An introduction to loopoids, Comment. Math. Univ. Carolin. 57 (2016), 515-526.

 Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Los cuasigrupoides son casos particulares de los *inverse semiloopoids* introducidos por J. Grabowski en:

- **J. Grabowski:** An introduction to loopoids, Comment. Math. Univ. Carolin. 57 (2016), 515-526.

Teorema

Para todo cuasigrupoide A se tiene que las igualdades

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{A}}(\lambda_{\mathrm{A}}(a)) &= t_{\mathrm{A}}(a), \\ t_{\mathrm{A}}(\lambda_{\mathrm{A}}(a)) &= s_{\mathrm{A}}(a), \\ \lambda_{\mathrm{A}}(a) \bullet a &= id_{\mathrm{A}}(s_{\mathrm{A}}(a)), \\ a \bullet \lambda_{\mathrm{A}}(a) &= id_{\mathrm{A}}(t_{\mathrm{A}}(a)), \\ \lambda_{\mathrm{A}}(\lambda_{\mathrm{A}}(a)) &= a, \\ \lambda_{\mathrm{A}}(a \bullet b) &= \lambda_{\mathrm{A}}(b) \bullet \lambda_{\mathrm{A}}(a), \end{aligned}$$

se cumplen para todo $a \in \mathrm{A}_1$ y todo $(a, b) \in \mathrm{A}_1 \; {}_{s_{\mathrm{A}}}\!\times_{t_{\mathrm{A}}} \mathrm{A}_1$.

Los cuasigrupoides son casos particulares de los *inverse semiloopoids* introducidos por J. Grabowski en:

- **J. Grabowski:** An introduction to loopoids, Comment. Math. Univ. Carolin. 57 (2016), 515-526.

Teorema

Para todo cuasigrupoide A se tiene que las igualdades

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{A}}(\lambda_{\mathrm{A}}(a)) &= t_{\mathrm{A}}(a), \\ t_{\mathrm{A}}(\lambda_{\mathrm{A}}(a)) &= s_{\mathrm{A}}(a), \\ \lambda_{\mathrm{A}}(a) \bullet a &= id_{\mathrm{A}}(s_{\mathrm{A}}(a)), \\ a \bullet \lambda_{\mathrm{A}}(a) &= id_{\mathrm{A}}(t_{\mathrm{A}}(a)), \\ \lambda_{\mathrm{A}}(\lambda_{\mathrm{A}}(a)) &= a, \\ \lambda_{\mathrm{A}}(a \bullet b) &= \lambda_{\mathrm{A}}(b) \bullet \lambda_{\mathrm{A}}(a), \end{aligned}$$

se cumplen para todo $a \in \mathrm{A}_1$ y todo $(a, b) \in \mathrm{A}_1 \ {}_{s_{\mathbf{A}}}\!\times_{t_{\mathbf{A}}} \mathrm{A}_1$.

Definición

Sea A un cuasigrupoide. El conjunto A_0 será llamado el conjunto base de A. Diremos que un cuasigrupoide A es finito si su conjunto base es finito.

Caso particular I

Supongamos que en la definición de cuasigrupoide asumimos que el producto es asociativo. Entonces tenemos un grupoide.

Caso particular I

Supongamos que en la definición de cuasigrupoide asumimos que el producto es asociativo. Entonces tenemos un grupoide.

Definición

Un grupoide G es un par ordenado de conjuntos $G = (G_0, G_1)$ tal que:

Caso particular I

Supongamos que en la definición de cuasigrupoide asumimos que el producto es asociativo. Entonces tenemos un grupoide.

Definición

Un grupoide G es un par ordenado de conjuntos $\mathsf{G} = (\mathsf{G}_0, \mathsf{G}_1)$ tal que:

(1) Existen aplicaciones $s_{\mathsf{G}} : \mathsf{G}_1 \to \mathsf{G}_0$, $t_{\mathsf{G}} : \mathsf{G}_1 \to \mathsf{G}_0$ e $id_{\mathsf{G}} : \mathsf{G}_0 \to \mathsf{G}_1$, lamadas dominio, codominio e identidad, respectivamente, cumpliendo

$$s_{\mathsf{G}}(id_{\mathsf{G}}(x)) = t_{\mathsf{G}}(id_{\mathsf{G}}(x)) = x, \quad \forall\, x \in \mathsf{G}_0.$$

Caso particular I

Supongamos que en la definición de cuasigrupoide asumimos que el producto es asociativo. Entonces tenemos un grupoide.

Definición

Un grupoide G es un par ordenado de conjuntos $G = (G_0, G_1)$ tal que:

(1) Existen aplicaciones $s_G : G_1 \to G_0$, $t_G : G_1 \to G_0$ e $id_G : G_0 \to G_1$, lamadas dominio, codominio e identidad, respectivamente, cumpliendo

$$s_G(id_G(x)) = t_G(id_G(x)) = x, \quad \forall\, x \in G_0.$$

(2) Existe una aplicación, llamada producto de G, $\bullet : G_1 \; {}_{s_G}\!\times_{t_G} G_1 \to G_1$, definida por $\bullet(\tau, \sigma) = \tau \bullet \sigma$, y una aplicación $\lambda_G : G_1 \to G_1$, llamada aplicación de inversión, tales que:

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Caso particular I

Supongamos que en la definición de cuasigrupoide asumimos que el producto es asociativo. Entonces tenemos un grupoide.

Definición

Un grupoide G es un par ordenado de conjuntos $G = (G_0, G_1)$ tal que:

(1) Existen aplicaciones $s_G : G_1 \to G_0$, $t_G : G_1 \to G_0$ e $id_G : G_0 \to G_1$, lamadas dominio, codominio e identidad, respectivamente, cumpliendo

$$s_G(id_G(x)) = t_G(id_G(x)) = x, \quad \forall\, x \in G_0.$$

(2) Existe una aplicación, llamada producto de G, $\bullet : G_1 \,{}_{s_G}\!\times_{t_G} G_1 \to G_1$, definida por $\bullet(\tau, \sigma) = \tau \bullet \sigma$, y una aplicación $\lambda_G : G_1 \to G_1$, llamada aplicación de inversión, tales que:

(2-1) Para cada $\sigma \in G_1$, $id_G(t_G(\sigma)) \bullet \sigma = \sigma = \sigma \bullet id_G(s_G(\sigma))$.

Caso particular I

Supongamos que en la definición de cuasigrupoide asumimos que el producto es asociativo. Entonces tenemos un grupoide.

Definición

Un grupoide G es un par ordenado de conjuntos $G = (G_0, G_1)$ tal que:

(1) Existen aplicaciones $s_G : G_1 \to G_0$, $t_G : G_1 \to G_0$ e $id_G : G_0 \to G_1$, lamadas dominio, codominio e identidad, respectivamente, cumpliendo

$$s_G(id_G(x)) = t_G(id_G(x)) = x, \quad \forall\, x \in G_0.$$

(2) Existe una aplicación, llamada producto de G, $\bullet : G_1 \ {}_{s_G}\!\times_{t_G} G_1 \to G_1$, definida por $\bullet(\tau, \sigma) = \tau \bullet \sigma$, y una aplicación $\lambda_G : G_1 \to G_1$, llamada aplicación de inversión, tales que:

(2-1) Para cada $\sigma \in G_1$, $id_G(t_G(\sigma)) \bullet \sigma = \sigma = \sigma \bullet id_G(s_G(\sigma))$.
(2-2) Para todos $(\tau, \sigma) \in G_1 \ {}_{s_G}\!\times_{t_G} G_1$,

$$s_G(\tau \bullet \sigma) = s_G(\sigma), \quad t_G(\tau \bullet \sigma) = t_G(\tau).$$

Caso particular I

Supongamos que en la definición de cuasigrupoide asumimos que el producto es asociativo. Entonces tenemos un grupoide.

Definición

Un grupoide G es un par ordenado de conjuntos $G = (G_0, G_1)$ tal que:

(1) Existen aplicaciones $s_G : G_1 \to G_0$, $t_G : G_1 \to G_0$ e $id_G : G_0 \to G_1$, lamadas dominio, codominio e identidad, respectivamente, cumpliendo

$$s_G(id_G(x)) = t_G(id_G(x)) = x, \quad \forall\, x \in G_0.$$

(2) Existe una aplicación, llamada producto de G, $\bullet : G_1 \,{}_{s_G}\!\times_{t_G} G_1 \to G_1$, definida por $\bullet(\tau, \sigma) = \tau \bullet \sigma$, y una aplicación $\lambda_G : G_1 \to G_1$, llamada aplicación de inversión, tales que:

(2-1) Para cada $\sigma \in G_1$, $id_G(t_G(\sigma)) \bullet \sigma = \sigma = \sigma \bullet id_G(s_G(\sigma))$.
(2-2) Para todos $(\tau, \sigma) \in G_1 \,{}_{s_G}\!\times_{t_G} G_1$,

$$s_G(\tau \bullet \sigma) = s_G(\sigma), \quad t_G(\tau \bullet \sigma) = t_G(\tau).$$

(2-3) Si $\omega \bullet (\tau \bullet \sigma)$ o $(\omega \bullet \tau) \bullet \sigma$ está definido también lo está el otro y $\omega \bullet (\tau \bullet \sigma) = (\omega \bullet \tau) \bullet \sigma$.

Caso particular I

Supongamos que en la definición de cuasigrupoide asumimos que el producto es asociativo. Entonces tenemos un grupoide.

Definición

Un grupoide G es un par ordenado de conjuntos $G = (G_0, G_1)$ tal que:

(1) Existen aplicaciones $s_G : G_1 \to G_0$, $t_G : G_1 \to G_0$ e $id_G : G_0 \to G_1$, lamadas dominio, codominio e identidad, respectivamente, cumpliendo

$$s_G(id_G(x)) = t_G(id_G(x)) = x, \quad \forall\, x \in G_0.$$

(2) Existe una aplicación, llamada producto de G, $\bullet : G_1 \ {}_{s_G}\!\times_{t_G} G_1 \to G_1$, definida por $\bullet(\tau, \sigma) = \tau \bullet \sigma$, y una aplicación $\lambda_G : G_1 \to G_1$, llamada aplicación de inversión, tales que:

(2-1) Para cada $\sigma \in \mathbf{G_1}$, $id_{\mathbf{G}}(t_{\mathbf{G}}(\sigma)) \bullet \sigma = \sigma = \sigma \bullet id_{\mathbf{G}}(s_{\mathbf{G}}(\sigma))$.

(2-2) Para todos $(\tau, \sigma) \in \mathbf{G_1} \ {}_{s_{\mathbf{G}}}\!\times_{t_{\mathbf{G}}} \mathbf{G_1}$,

$$s_{\mathbf{G}}(\tau \bullet \sigma) = s_{\mathbf{G}}(\sigma), \quad t_{\mathbf{G}}(\tau \bullet \sigma) = t_{\mathbf{G}}(\tau).$$

(2-3) Si $\omega \bullet (\tau \bullet \sigma)$ o $(\omega \bullet \tau) \bullet \sigma$ está definido también lo está el otro y $\omega \bullet (\tau \bullet \sigma) = (\omega \bullet \tau) \bullet \sigma$.

(2-4) Para cada $\sigma \in \mathbf{G_1}$, $(\lambda_{\mathbf{G}}(\sigma), \sigma)$ y $(\sigma, \lambda_{\mathbf{G}}(\sigma))$ pertenecen a $\mathbf{G_1} \ {}_{s_{\mathbf{G}}}\!\times_{t_{\mathbf{G}}} \mathbf{G_1}$ y

$$\lambda_{\mathbf{G}}(\sigma) \bullet \sigma = id_{\mathbf{G}}(s_{\mathbf{G}}(\sigma)), \quad \sigma \bullet \lambda_{\mathbf{G}}(\sigma) = id_{\mathbf{G}}(t_{\mathbf{G}}(\sigma)).$$

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Nótese que un grupoide también era una categoría donde todo morfismo era un isomorfismo. Esto ocurre en el caso anterior ya que podemos pensar G como una categoría con objetos $|\mathsf{G}| = \mathsf{G}_0$ y para cada par de objetos $x, y \in \mathsf{G}_0$ tomamos

$$Hom_{\mathsf{G}}(x, y) = \{\sigma \in \mathsf{G}_1 \;/\; \mathsf{s}_{\mathsf{G}}(\sigma) = \mathrm{x},\;\; \mathsf{t}_{\mathsf{G}}(\sigma) = \mathrm{y}\}$$

Para todo objeto x, el morfismo identidad es $id_{\mathsf{G}}(x)$ y además todo morfismo $\sigma \in Hom_{\mathsf{G}}(x, y)$ es un isomorfismo ya que

$$\lambda_{\mathsf{G}}(\sigma) \bullet \sigma = id_{\mathsf{G}}(x), \quad \sigma \bullet \lambda_{\mathsf{G}}(\sigma) = id_{\mathsf{G}}(y).$$

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Nótese que un grupoide también era una categoría donde todo morfismo era un isomorfismo. Esto ocurre en el caso anterior ya que podemos pensar G como una categoría con objetos $|\mathsf{G}| = \mathsf{G}_0$ y para cada par de objetos $x, y \in \mathsf{G}_0$ tomamos

$$Hom_{\mathsf{G}}(x, y) = \{\sigma \in \mathsf{G}_1 \ / \ \mathsf{s}_{\mathsf{G}}(\sigma) = \mathsf{x}, \ \ \mathsf{t}_{\mathsf{G}}(\sigma) = \mathsf{y}\}$$

Para todo objeto x, el morfismo identidad es $id_{\mathsf{G}}(x)$ y además todo morfismo $\sigma \in Hom_{\mathsf{G}}(x, y)$ es un isomorfismo ya que

$$\lambda_{\mathsf{G}}(\sigma) \bullet \sigma = id_{\mathsf{G}}(x), \quad \sigma \bullet \lambda_{\mathsf{G}}(\sigma) = id_{\mathsf{G}}(y).$$

Inversamente toda categoría pequeña que sea un grupoide se puede identificar con un grupoide en el sentido conjuntista anterior.

Un ejemplo típico de grupoide es el grupoide ordinario (coarse) X^c asociado a un conjunto X. Este grupoide se define como sigue:

$$\mathsf{X}^c_0 = X, \;\; \mathsf{X}^c_1 = X \times X, \;\; s_{\mathsf{X}^c}(x,y) = y, \;\; t_{\mathsf{X}^c}(x,y) = x, \;\; id_{\mathsf{X}^c}(x) = (x,x)$$

$$(z,x) \bullet (x,y) = (z,y), \;\; \lambda_{\mathsf{X}^c}(x,y) = (y,x).$$

Un ejemplo típico de grupoide es el grupoide ordinario (coarse) X^c asociado a un conjunto X. Este grupoide se define como sigue:

$$\mathsf{X}_0^c = X, \ \ \mathsf{X}_1^c = X \times X, \ \ s_{\mathsf{X}^c}(x,y) = y, \ \ t_{\mathsf{X}^c}(x,y) = x, \ \ id_{\mathsf{X}^c}(x) = (x,x)$$

$$(z,x) \bullet (x,y) = (z,y), \ \ \lambda_{\mathsf{X}^c}(x,y) = (y,x).$$

El grupoide discreto X^d asociado a un conjunto X es otro ejemplo de grupoide donde

$$\mathsf{X}_0^d = X, \ \mathsf{X}_1^d = X, \ s_{\mathsf{X}^d}(x) = t_{\mathsf{X}^d}(x) = id_{\mathsf{X}^d}(x) = \lambda_{\mathsf{X}^d}(x) = x$$

y

$$x \bullet x = x.$$

Caso particular II

Supongamos que en la definición de cuasigrupoide asumimos que A_0 tiene un único elemento. Entonces tenemos un lazo con inversos o un cuasigrupo en el sentido de J. Klim y S. Majid.

- **J. Klim, S. Majid:** Hopf quasigroups and the algebraic 7-sphere, J. Algebra 323 (2010), 3067-3110.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Caso particular II

Supongamos que en la definición de cuasigrupoide asumimos que A_0 tiene un único elemento. Entonces tenemos un lazo con inversos o un cuasigrupo en el sentido de J. Klim y S. Majid.

- **J. Klim, S. Majid:** Hopf quasigroups and the algebraic 7-sphere, J. Algebra 323 (2010), 3067-3110.

Definición

Un cuasigrupo A es una terna $A = (A, \cdot, e_A)$, donde A es un conjunto dotado de un producto $\cdot$ y e_A es un elemento de A, llamado el elemento identidad, satisfaciendo

$$e_A \cdot u = u = u \cdot e_A$$

y con la propiedad de que para cada $u \in A$ existe $u^{-1} \in A$ tal que

$$u^{-1} \cdot (u \cdot v) = v = (v \cdot u) \cdot u^{-1},$$

se cumple para todo $v \in A$.

Caso particular II

Supongamos que en la definición de cuasigrupoide asumimos que A_0 tiene un único elemento. Entonces tenemos un lazo con inversos o un cuasigrupo en el sentido de J. Klim y S. Majid.

- **J. Klim, S. Majid:** Hopf quasigroups and the algebraic 7-sphere, J. Algebra 323 (2010), 3067-3110.

Definición

Un cuasigrupo A es una terna $A = (A, \cdot, e_A)$, donde A es un conjunto dotado de un producto $\cdot$ y e_A es un elemento de A, llamado el elemento identidad, satisfaciendo

$$e_A \cdot u = u = u \cdot e_A$$

y con la propiedad de que para cada $u \in A$ existe $u^{-1} \in A$ tal que

$$u^{-1} \cdot (u \cdot v) = v = (v \cdot u) \cdot u^{-1},$$

se cumple para todo $v \in A$.

Se puede probar que en todo cuasigrupo A, el inverso de u es único y, dados $u, v \in A$,

$$(u^{-1})^{-1} = u, \quad (u \cdot v)^{-1} = v^{-1} \cdot u^{-1}.$$

Caso particular III

Supongamos que en la definición de cuasigrupoide asumimos que A_0 tiene un único elemento y que el producto es asociativo. Entonces tenemos un grupo.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Definición

Sean A, A' cuasigrupoides. Un morfismo $\Gamma : \mathsf{A} \to \mathsf{A}'$ entre A y A' es un par de aplicaciones $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$,

$$\Gamma_0 : \mathsf{A}_0 \to \mathsf{A}'_0, \quad \Gamma_1 : \mathsf{A}_1 \to \mathsf{A}'_1,$$

tales que

(1) $\Gamma_0 \circ s_{\mathsf{A}} = s_{\mathsf{A}'} \circ \Gamma_1$,

(2) $\Gamma_0 \circ t_{\mathsf{A}} = t_{\mathsf{A}'} \circ \Gamma_1$,

(3) Para todo $x \in \mathsf{A}_0$, $\Gamma_1(id_{\mathsf{A}}(x)) = id_{\mathsf{A}'}(\Gamma_0(x))$,

(4) Para todo $(a, b) \in \mathsf{A}_1 \; {}_{s_{\mathsf{A}}}\!\times_{t_{\mathsf{A}}} \mathsf{A}_1$, $\Gamma_1(a \bullet b) = \Gamma_1(a) \bullet' \Gamma_1(b)$.

Definición

Sean A, A′ cuasigrupoides. Un morfismo $\Gamma : A \to A'$ entre A y A′ es un par de aplicaciones $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$,

$$\Gamma_0 : A_0 \to A'_0, \quad \Gamma_1 : A_1 \to A'_1,$$

tales que

(1) $\Gamma_0 \circ s_A = s_{A'} \circ \Gamma_1$,

(2) $\Gamma_0 \circ t_A = t_{A'} \circ \Gamma_1$,

(3) Para todo $x \in A_0$, $\Gamma_1(id_A(x)) = id_{A'}(\Gamma_0(x))$,

(4) Para todo $(a, b) \in A_1 \; {}_{s_A}\!\times_{t_A} A_1$, $\Gamma_1(a \bullet b) = \Gamma_1(a) \bullet' \Gamma_1(b)$.

Con la composición obvia podemos definir una categoría, la categoría de cuasigrupoides, denotada por

$$\mathrm{CGPD}.$$

Con $\overline{\mathrm{CGPD}}$ denotaremos la subcategoría plena de CGPD cuyos objetos son los cuasigrupoides finitos.

Ejemplo

Sea A un cuasigrupo con producto $\cdot$ y sea X un conjunto. Asumamos que existe una aplicación $\psi_X : A \times X \to X$ satisfaciendo las siguientes dos condiciones:

$$\psi_X(e_A, x) = x, \qquad \psi_X(a \cdot b, x) = \psi_X(a, \psi_X(b, x)),$$

para todo $x \in X$ y $a, b \in A$.
En este caso diremos que ψ_X es una acción de A sobre X. El cuasigrupoide $\mathrm{B} = (\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1)$ asociado a la acción ψ_X está dado por los conjuntos $\mathrm{B}_0 = X$, $\mathrm{B}_1 = A \times X$ y aplicaciones

$$s_{\mathrm{B}} : \mathrm{B}_1 \to \mathrm{B}_0, \quad s_{\mathrm{B}}(a, x) = x,$$

$$t_{\mathrm{B}} : \mathrm{B}_1 \to \mathrm{B}_0, \quad t_{\mathrm{B}}(a, x) = \psi_X(a, x),$$

$$id_{\mathrm{B}} : \mathrm{B}_0 \to \mathrm{B}_1, \quad id_{\mathrm{B}}(x) = (e_A, x).$$

Entonces,

$$\mathrm{B}_1 \ {}_{s_{\mathbf{B}}}\!\times_{t_{\mathbf{B}}} \mathrm{B}_1 = \{((a, x), (b, y),) \in \mathrm{B}_1 \times \mathrm{B}_1 \ / \ \psi_X(b, y) = x\}$$

y el producto está definido por

$$(a, x) \star (b, y) = (a \cdot b, y).$$

La inversión es $\lambda_{\mathrm{B}} : \mathrm{B}_1 \to \mathrm{B}_1$ donde $\lambda_{\mathrm{B}}(a, x) = (a^{-1}, \psi_X(a, x))$.

Como se probó en

- **J.N. Alonso Álvarez, J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez:** Quasigroupoids and weak Hopf quasigroups, J. Algebra 568 (2021), 408-436.

se pueden construir ejemplos de este tipo usando lazos Moufang de orden pequeño y el álgebra de Hopf 4-dimensional de Taft.

Ejemplo

Sea A un cuasigrupo y sea X un conjunto. Denotemos por T el conjunto

$$T = \{(a, x, y) \ / \ a \in A, \ x, y \in X\}.$$

El cuasigrupoide $\mathrm{T} = (\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1)$ asociado a T está definido por los conjuntos

$$\mathrm{T}_0 = \{(e_A, x, x) \in T\}, \quad \mathrm{T}_1 = T$$

y aplicaciones

$$s_{\mathrm{T}} : \mathrm{T}_1 \to \mathrm{T}_0, \quad s_{\mathrm{T}}(a, x, y) = (e_A, y, y),$$
$$t_{\mathrm{T}} : \mathrm{T}_1 \to \mathrm{T}_0, \quad t_{\mathrm{T}}(a, x, y) = (e_A, x, x),$$
$$id_{\mathrm{T}} : \mathrm{T}_0 \to \mathrm{T}_1, \quad id_{\mathrm{T}}(e_A, x, x) = (e_A, x, x).$$

Entonces,

$$\mathrm{T}_1 \ {}_{s_{\mathrm{T}}}\!\times_{t_{\mathrm{T}}} \mathrm{T}_1 = \{((a, x, y), (b, y, r)) \in \mathrm{T}_1 \times \mathrm{T}_1\}$$

y el producto viene dado por

$$(a, x, y) \star (b, y, r) = (a \cdot b, x, r).$$

La inversión $\lambda_{\mathrm{T}} : \mathrm{T}_1 \to \mathrm{T}_1$ es

$$\lambda_{\mathrm{B}}(a, x, y) = (a^{-1}, y, x).$$

Ejemplo

Sea A un cuasigrupoide, sea P un conjunto y sea $\pi : P \to \mathsf{A}_0$ una aplicación sobreyectiva. El cuasigrupoide $\mathsf{P(A)}^{\pi} = (\mathsf{P(A)}_0^{\pi}, \mathsf{P(A)}_1^{\pi})$ está dado por los conjuntos $\mathsf{P(A)}_0^{\pi} = P$,

$$\mathsf{P(A)}_1^{\pi} = \{(p,a,q) \;/\; (p,a,q) \in P \times \mathsf{A}_1 \times P,\ \pi(p) = t_{\mathsf{A}}(a),\ \pi(q) = s_{\mathsf{A}}(a)\}$$

y aplicaciones

$$s_{\mathsf{P(A)}^{\pi}} : \mathsf{P(A)}_1^{\pi} \to \mathsf{P(A)}_0^{\pi}, \quad s_{\mathsf{P(A)}^{\pi}}(p,a,q) = q,$$
$$t_{\mathsf{P(A)}^{\pi}} : \mathsf{P(A)}_1^{\pi} \to \mathsf{P(A)}_0^{\pi}, \quad t_{\mathsf{P(A)}^{\pi}}(p,a,q) = p,$$
$$id_{\mathsf{P(A)}^{\pi}} : \mathsf{P(A)}_0^{\pi} \to \mathsf{P(A)}_1^{\pi}, \quad id_{\mathsf{P(A)}^{\pi}}(p,a,q) = (p, id_{\pi(p)}, p).$$

Entonces,

$$\mathsf{P(A)}_1^{\pi}\ {}_{s_{\mathsf{P(A)}^{\pi}}}\!\times_{t_{\mathsf{P(A)}^{\pi}}} \mathsf{P(A)}^{\pi}{}_1 = \{((p,a,q),(q,b,n)) \in \mathsf{P(A)}^{\pi}{}_1 \times \mathsf{P(A)}^{\pi}{}_1\}$$

y el producto viene dado por

$$(p,a,q) \star (q,b,n) = (p, a \bullet b, n).$$

La inversión $\lambda_{\mathsf{P(A)}^{\pi}} : \mathsf{P(A)}_1^{\pi} \to \mathsf{P(A)}_1^{\pi}$ es

$$\lambda_{\mathsf{P(A)}^{\pi}}(p,a,q) = (q, \lambda_{\mathsf{A}}(a), p).$$

Ejemplo

Si X es un conjunto y L es un cuasigrupo, una acción parcial de L sobre X es una colección de subconjuntos X_u, $u \in L$, de X junto con un conjunto de aplicaciones biyectivas $\psi_u : X_{u^{-1}} \to X_u$, tales que

(1) $X_{e_L} = X$ y $\psi_{e_L} = id_X$.

(2) Para cada $u, v \in L$, $\psi_u^{-1}(X_u \cap X_{v^{-1}}) \subset X_{(uv)^{-1}}$.

(3) Si $x \in \psi_u^{-1}(X_u \cap X_{v^{-1}})$, se cumple la identidad $(\psi_v \circ \psi_u)(x) = \psi_{v \cdot u}(x)$.

Ejemplo

Si X es un conjunto y L es un cuasigrupo, una acción parcial de L sobre X es una colección de subconjuntos X_u, $u \in L$, de X junto con un conjunto de aplicaciones biyectivas $\psi_u : X_{u^{-1}} \to X_u$, tales que

(1) $X_{e_L} = X$ y $\psi_{e_L} = id_X$.

(2) Para cada $u, v \in L$, $\psi_u^{-1}(X_u \cap X_{v^{-1}}) \subset X_{(uv)^{-1}}$.

(3) Si $x \in \psi_u^{-1}(X_u \cap X_{v^{-1}})$, se cumple la identidad $(\psi_v \circ \psi_u)(x) = \psi_{v \cdot u}(x)$.

Nótese que si $x \in X_w$ se tiene que

$$x \in \psi_{w^{-1}}^{-1}(X_{w^{-1}}) = \psi_{w^{-1}}^{-1}(X_{w^{-1}} \cap X_{w^{-1}}).$$

Como consecuencia:

$$(\psi_w \circ \psi_{w^{-1}})(x) = \psi_{w \cdot w^{-1}}(x) = \psi_{e_L}(x) = x.$$

Por lo tanto, $\psi_w^{-1} = \psi_{w^{-1}}$ para todo $w \in L$.

El cuasigrupoide $T = (T_0, T_1)$ asociado a la acción parcial está dado por los conjuntos $T_0 = X$, $T_1 = \{(u, x) \;/\; u \in L,\; x \in X_{u^{-1}}\}$ y aplicaciones

$$s_T : T_1 \to T_0, \quad s_T((u,x)) = x,$$

$$t_T : T_1 \to T_0, \quad t_T((u,x)) = \psi_u(x),$$

$$id_T : T_0 \to T_1, \quad id_T(x) = (e_L, x).$$

Entonces,

$$T_1 \;{}_{s_T}\!\times_{t_T}\; T_1 = \{((v,y),(u,x)) \in T_1 \times T_1 \;/\; \psi_u(x) = y\}$$

y el producto será

$$\bullet : T_1 \;{}_{s_T}\!\times_{t_T}\; T_1 \to T_1,$$

donde

$$(v,y) \bullet (u,x) = (v \cdot u, x).$$

la aplicación inversa $\lambda_T : T_1 \to T_1$ está definida por: $\lambda_T((u,x)) = (u^{-1}, \psi_u(x))$.

Pares emparejados de cuasigrupoides

Definición

Sean A y H cuasigrupoides con productos $\bullet$ y $\star$ y con la misma base. Una acción por la izquierda de H en A es una aplicación $\varphi_A : \mathrm{H}_1 \; {}_{s_{\mathbf{H}}}\!\times_{t_{\mathbf{A}}} \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_1$, satisfaciendo:

(1) Para todo $(h, a) \in \mathrm{H}_1 \; {}_{s_{\mathbf{H}}}\!\times_{t_{\mathbf{A}}} \mathrm{A}_1$, $t_{\mathrm{A}}(\varphi_{\mathrm{A}}(h, a)) = t_{\mathrm{H}}(h)$.

(2) Para todo $(h, a) \in \mathrm{H}_1 \; {}_{s_{\mathbf{H}}}\!\times_{t_{\mathbf{A}}} \mathrm{A}_1$, $(g, h) \in \mathrm{H}_1 \; {}_{s_{\mathbf{H}}}\!\times_{t_{\mathbf{H}}} \mathrm{H}_1$,

$$\varphi_{\mathrm{A}}(g \star h, a) = \varphi_{\mathrm{A}}(g, \varphi_{\mathrm{A}}(h, a)).$$

(3) Para todo $a \in \mathrm{A}_1$, $\varphi_{\mathrm{A}}(id_{\mathrm{H}}(t_{\mathrm{A}}(a)), a) = a$.

Definición

Sean A y H cuasigrupoides con productos $\bullet$ y $\star$ y con la misma base. Una acción por la izquierda de H en A es una aplicación $\varphi_A : \mathrm{H}_1 \, {}_{s_\mathrm{H}}\!\times_{t_\mathrm{A}} \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_1$, satisfaciendo:

(1) Para todo $(h,a) \in \mathrm{H}_1 \, {}_{s_\mathrm{H}}\!\times_{t_\mathrm{A}} \mathrm{A}_1$, $t_\mathrm{A}(\varphi_\mathrm{A}(h,a)) = t_\mathrm{H}(h)$.

(2) Para todo $(h,a) \in \mathrm{H}_1 \, {}_{s_\mathrm{H}}\!\times_{t_\mathrm{A}} \mathrm{A}_1$, $(g,h) \in \mathrm{H}_1 \, {}_{s_\mathrm{H}}\!\times_{t_\mathrm{H}} \mathrm{H}_1$,

$$\varphi_\mathrm{A}(g \star h, a) = \varphi_\mathrm{A}(g, \varphi_\mathrm{A}(h,a)).$$

(3) Para todo $a \in \mathrm{A}_1$, $\varphi_\mathrm{A}(id_\mathrm{H}(t_\mathrm{A}(a)), a) = a$.

Similarmente una acción por la derecha de A en H es una aplicación

$$\phi_\mathrm{H} : \mathrm{H}_1 \, {}_{s_\mathrm{H}}\!\times_{t_\mathrm{A}} \mathrm{A}_1 \to \mathrm{H}_1,$$

satisfaciendo:

(1) Para todo $(h,a) \in \mathrm{H}_1 \, {}_{s_\mathrm{H}}\!\times_{t_\mathrm{A}} \mathrm{A}_1$, $s_\mathrm{H}(\phi_\mathrm{H}(h,a)) = s_\mathrm{A}(a)$.

(2) Para todo $(h,a) \in \mathrm{H}_1 \, {}_{s_\mathrm{H}}\!\times_{t_\mathrm{A}} \mathrm{A}_1$, $(a,b) \in \mathrm{A}_1 \, {}_{s_\mathrm{A}}\!\times_{t_\mathrm{A}} \mathrm{A}_1$,

$$\phi_\mathrm{H}(h, a \bullet b) = \phi_\mathrm{H}(\phi_\mathrm{H}(h,a), b),$$

(3) Para todo $h \in \mathrm{H}_1$, $\phi_\mathrm{H}(h, id_\mathrm{A}(s_\mathrm{H}(h))) = h$.

Definición

Un par emparejado de cuasigrupoides es un par de cuasigrupoides (A, H) con la misma base, con una acción por la izquierda de H sobre A, $\varphi_{\mathsf{A}} : \mathsf{H}_1 \ {}_{s_{\mathbf{H}}}\!\times_{t_{\mathbf{A}}} \mathsf{A}_1 \to \mathsf{A}_1$, y una acción por la derecha de A sobre H, $\phi_{\mathsf{H}} : \mathsf{H}_1 \ {}_{s_{\mathbf{H}}}\!\times_{t_{\mathbf{A}}} \mathsf{A}_1 \to \mathsf{H}_1$, satisfaciendo las siguientes condiciones:

(1) Para todo $(h, a) \in \mathsf{H}_1 \ {}_{s_{\mathbf{H}}}\!\times_{t_{\mathbf{A}}} \mathsf{A}_1$,

$$s_{\mathsf{A}}(\varphi_{\mathsf{A}}(h, a)) = t_{\mathsf{H}}(\phi_{\mathsf{H}}(h, a)).$$

(2) Para todo $(h, a) \in \mathsf{H}_1 \ {}_{s_{\mathbf{H}}}\!\times_{t_{\mathbf{A}}} \mathsf{A}_1$ y $(a, b) \in \mathsf{A}_1 \ {}_{s_{\mathbf{A}}}\!\times_{t_{\mathbf{A}}} \mathsf{A}_1$,

$$\varphi_{\mathsf{A}}(h, a \bullet b) = \varphi_{\mathsf{A}}(h, a) \bullet \varphi_{\mathsf{A}}(\phi_{\mathsf{H}}(h, a), b).$$

(3) Para todo $(h, a) \in \mathsf{H}_1 \ {}_{s_{\mathbf{H}}}\!\times_{t_{\mathbf{A}}} \mathsf{A}_1$ y $(g, h) \in \mathsf{H}_1 \ {}_{s_{\mathbf{H}}}\!\times_{t_{\mathbf{H}}} \mathsf{H}_1$,

$$\phi_{\mathsf{H}}(g \star h, a) = \phi_{\mathsf{H}}(g, \varphi_{\mathsf{A}}(h, a)) \star \phi_{\mathsf{H}}(h, a).$$

Teorema

Sea (A, H) un par emparejado de cuasigrupoides. Para todos $a, b \in \mathrm{A}_1$, $g, h \in \mathrm{H}_1$ para los cuales las operaciones están definidas, se cumple lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\mathrm{A}}(h, id_{\mathrm{A}}(s_{\mathrm{H}}(h))) &= id_{\mathrm{A}}(t_{\mathrm{H}}(h)),\\
\phi_{\mathrm{H}}(id_{\mathrm{H}}(t_{\mathrm{A}}(a)), a) &= id_{\mathrm{H}}(s_{\mathrm{A}}(a)),\\
\lambda_{\mathrm{A}}(\varphi_{\mathrm{A}}(h, a)) &= \varphi_{\mathrm{A}}(\phi_{\mathrm{H}}(h, a), \lambda_{\mathrm{A}}(a)),\\
\lambda_{\mathrm{H}}(\phi_{\mathrm{H}}(h, a)) &= \phi_{\mathrm{H}}(\lambda_{\mathrm{H}}(h), \varphi_{\mathrm{A}}(h, a))\\
(b \bullet \varphi_{\mathrm{A}}(h, a)) \bullet \varphi_{\mathrm{A}}(\phi_{\mathrm{H}}(h, a), \lambda_{\mathrm{A}}(a)) &= b,\\
\phi_{\mathrm{H}}(\lambda_{\mathrm{H}}(h), \varphi_{\mathrm{A}}(h, a)) \star (\phi_{\mathrm{H}}(h, a) \star g) &= g,\\
\varphi_{\mathrm{A}}(\lambda_{\mathrm{H}}(\phi_{\mathrm{H}}(h, a)), \lambda_{\mathrm{A}}(\varphi_{\mathrm{A}}(h, a))) &= \lambda_{\mathrm{A}}(a),\\
\phi_{\mathrm{H}}(\lambda_{\mathrm{H}}(\phi_{\mathrm{H}}(h, a)), \lambda_{\mathrm{A}}(\varphi_{\mathrm{A}}(h, a))) &= \lambda_{\mathrm{H}}(h),\\
\lambda_{\mathrm{A}}(a) \bullet \varphi_{\mathrm{A}}(\lambda_{\mathrm{H}}(h), b) &= \varphi_{\mathrm{A}}(\lambda_{\mathrm{H}}(\phi_{\mathrm{H}}(h, a)), \lambda_{\mathrm{A}}(\varphi_{\mathrm{A}}(h, a)) \bullet b),\\
\phi_{\mathrm{H}}(g, \lambda_{\mathrm{A}}(a)) \star \lambda_{\mathrm{H}}(h) &= \phi_{\mathrm{H}}(g \star \lambda_{\mathrm{H}}(\phi_{\mathrm{H}}(h, a)), \lambda_{\mathrm{A}}(\varphi_{\mathrm{A}}(h, a))).
\end{aligned}
$$

Teorema

Sea (A, H) un par emparejado de cuasigrupoides. El par

$$\mathsf{A} \bowtie \mathsf{H} = ((\mathsf{A} \bowtie \mathsf{H})_0, (\mathsf{A} \bowtie \mathsf{H})_1),$$

donde $(\mathsf{A} \bowtie \mathsf{H})_0 = \mathsf{A}_0$, $(\mathsf{A} \bowtie \mathsf{H})_1 = \mathsf{A}_1 \; {}_{s_{\mathsf{A}}}\!\times_{t_{\mathsf{H}}} \mathsf{H}_1$, es un cuasigrupoide con

$$s_{\mathsf{A}\bowtie\mathsf{H}}(a,h) = s_{\mathsf{H}}(h), \quad t_{\mathsf{A}\bowtie\mathsf{H}}(a,h) = t_{\mathsf{A}}(a), \quad id_{\mathsf{A}\bowtie\mathsf{H}}(x) = (id_{\mathsf{A}}(x), id_{\mathsf{H}}(x)),$$

producto

$$(a,g).{}_{\Psi}(b,h) = (a \bullet \Psi_1(g,b), \Psi_2(g,b) \star h),$$

donde

$$\Psi : \mathsf{H}_1 \; {}_{s_{\mathsf{H}}}\!\times_{t_{\mathsf{A}}} \mathsf{A}_1 \to \mathsf{A}_1 \; {}_{s_{\mathsf{A}}}\!\times_{t_{\mathsf{H}}} \mathsf{H}_1$$

es la aplicación de componentes $\Psi_1(g,b) = \varphi_{\mathsf{A}}(g,b)$ y $\Psi_2(g,b) = \phi_{\mathsf{H}}(g,b)$, e inversión

$$\lambda_{\mathsf{A}\bowtie\mathsf{H}}(a,h) = \Psi(\lambda_{\mathsf{H}}(h), \lambda_{\mathsf{A}}(a)).$$

Teorema

Sea (A, H) un par emparejado de cuasigrupoides. El par

$$\mathsf{A} \bowtie \mathsf{H} = ((\mathsf{A} \bowtie \mathsf{H})_0, (\mathsf{A} \bowtie \mathsf{H})_1),$$

donde $(\mathsf{A} \bowtie \mathsf{H})_0 = \mathsf{A}_0$, $(\mathsf{A} \bowtie \mathsf{H})_1 = \mathsf{A}_1 \ {}_{s_\mathsf{A}}\!\times_{t_\mathsf{H}} \mathsf{H}_1$, es un cuasigrupoide con

$$s_{\mathsf{A}\bowtie\mathsf{H}}(a,h) = s_\mathsf{H}(h), \quad t_{\mathsf{A}\bowtie\mathsf{H}}(a,h) = t_\mathsf{A}(a), \quad id_{\mathsf{A}\bowtie\mathsf{H}}(x) = (id_\mathsf{A}(x), id_\mathsf{H}(x)),$$

producto

$$(a,g).\!_\Psi(b,h) = (a \bullet \Psi_1(g,b), \Psi_2(g,b) \star h),$$

donde

$$\Psi : \mathsf{H}_1 \ {}_{s_\mathsf{H}}\!\times_{t_\mathsf{A}} \mathsf{A}_1 \to \mathsf{A}_1 \ {}_{s_\mathsf{A}}\!\times_{t_\mathsf{H}} \mathsf{H}_1$$

es la aplicación de componentes $\Psi_1(g,b) = \varphi_\mathsf{A}(g,b)$ y $\Psi_2(g,b) = \phi_\mathsf{H}(g,b)$, e inversión

$$\lambda_{\mathsf{A}\bowtie\mathsf{H}}(a,h) = \Psi(\lambda_\mathsf{H}(h), \lambda_\mathsf{A}(a)).$$

Definición

Sea (A, H) un par emparejado de cuasigrupoides. El cuasigrupoide $\mathsf{A} \bowtie \mathsf{H}$ se llamará cuasigrupoide doble producto cruzado de A y H.

Teorema

Sea (A, H) un par emparejado de cuasigrupoides. Entonces, A y H son subcuasigrupoides de $\mathsf{A} \bowtie \mathsf{H}$ donde

$$i^{\mathsf{A}} : \mathsf{A} \to \mathsf{A} \bowtie \mathsf{H}$$

esta definida por $i^{\mathsf{A}} = (i_0^{\mathsf{A}} : \mathsf{A}_0 \to (\mathsf{A} \bowtie \mathsf{H})_0, i_1^{\mathsf{A}} : \mathsf{A}_1 \to (\mathsf{A} \bowtie \mathsf{H})_1)$ con

$$i_0^{\mathsf{A}} = id_{\mathsf{A}_0}, \quad i_1^{\mathsf{A}}(a) = (a, id_{\mathsf{H}}(s_{\mathsf{A}}(a))),$$

e $i^{\mathsf{H}} : \mathsf{H} \to \mathsf{A} \bowtie \mathsf{H}$ está dada por

$$i^{\mathsf{H}} = (i_0^{\mathsf{H}} : \mathsf{A}_0 \to (\mathsf{A} \bowtie \mathsf{H})_0, i_1^{\mathsf{H}} : \mathsf{H}_1 \to (\mathsf{A} \bowtie \mathsf{H})_1)$$

donde

$$i_0^{\mathsf{H}} = id_{\mathsf{A}_0}, \quad i_1^{\mathsf{H}}(g) = (id_{\mathsf{A}}(t_{\mathsf{H}}(g)), g),$$

Definición

Sean A, H y B cuasigrupoides con la misma base. Asumamos que A y H son subcuasigrupoides de B con inclusiones $i^{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ e $i^{\mathrm{H}} : \mathrm{H} \to \mathrm{B}$ satisfaciendo que $i_0^{\mathrm{A}} = i_0^{\mathrm{H}} = id_{\mathrm{A}_0}$. Sea $\diamond$ el producto definido en B. Diremos que $[\mathrm{A}, \mathrm{H}]$ es una factorización exacta de B, si en el caso de que los productos involucrados estén definidos, se cumple que

(i) $i^{\mathrm{H}}(g) \diamond (i^{\mathrm{A}}(a) \diamond i^{\mathrm{A}}(b)) = (i^{\mathrm{H}}(g) \diamond i^{\mathrm{A}}(a)) \diamond i^{\mathrm{A}}(b)$,

(ii) $i^{\mathrm{H}}(g) \diamond (i^{\mathrm{H}}(h) \diamond i^{\mathrm{A}}(a)) = (i^{\mathrm{H}}(g) \diamond i^{\mathrm{H}}(h)) \diamond i^{\mathrm{A}}(a)$,

(iii) $i^{\mathrm{H}}(h) \diamond (i^{\mathrm{A}}(a) \diamond i^{\mathrm{H}}(f)) = (i^{\mathrm{H}}(h) \diamond i^{\mathrm{A}}(a)) \diamond i^{\mathrm{H}}(f)$,

(iv) $i^{\mathrm{A}}(c) \diamond (i^{\mathrm{H}}(h) \diamond i^{\mathrm{A}}(a)) = (i^{\mathrm{A}}(c) \diamond i^{\mathrm{H}}(h)) \diamond i^{\mathrm{A}}(a)$,

(v) $i^{\mathrm{A}}(a) \diamond (i^{\mathrm{A}}(b) \diamond i^{\mathrm{H}}(g)) = (i^{\mathrm{A}}(a) \diamond i^{\mathrm{A}}(b)) \diamond i^{\mathrm{H}}(g)$,

(vi) $i^{\mathrm{A}}(a) \diamond (i^{\mathrm{H}}(g) \diamond i^{\mathrm{H}}(h)) = (i^{\mathrm{A}}(a) \diamond i^{\mathrm{H}}(h)) \diamond i^{\mathrm{H}}(g)$

y

(vii) La aplicación $\theta_{\mathrm{B}} = \diamond \circ (i^{\mathrm{A}} \times i^{\mathrm{H}}) : \mathrm{A}_1 \, {}_{s_{\mathbf{A}}}\!\times_{t_{\mathbf{H}}} \mathrm{H}_1 \to \mathrm{B}_1$ es una biyección.

Teorema

Sea $[A, H]$ una factorización exacta de un cuasigrupoide B. Entonces existe un par emparejado de cuasigrupoides (A, H) y un isomorfismo de cuasigrupoides entre $A \bowtie H$ y B.

Teorema

Sea $[A, H]$ una factorización exacta de un cuasigrupoide B. Entonces existe un par emparejado de cuasigrupoides (A, H) y un isomorfismo de cuasigrupoides entre $A \bowtie H$ y B.

Si restringimos este resultado a grupos, cuasigrupos o a grupoides, tenemos que los correspondientes resultados de factorizaciones exactas para esos objetos algebraicos se obtienen como casos particulares del teorema anterior.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ejemplo

Sea A un cuasigrupo con producto $\cdot$ y sea X un conjunto. Asumamos que existe una acción de A sobre X denotada por $\psi_X : A \times X \to X$. Sea $\mathsf{B} = (\mathsf{B}_0, \mathsf{B}_1)$ el cuasigrupoide asociado a la acción ψ_X. Sea X^d el grupoide discreto. Entonces, $(\mathsf{X}^d, \mathsf{B})$ es un par emparejado de cuasigrupoides donde

$$\varphi_{\mathbf{X}^d}((a,x),x) = \psi_X(a,x), \quad \phi_{\mathbf{B}}((a,x),x) = (a,x).$$

En este caso el doble producto cruzado está definido por $\mathsf{X}^d \bowtie \mathsf{B}$, siendo

$$(\mathsf{X}^d \bowtie \mathsf{B})_0 = X, \quad (\mathsf{X}^d \bowtie \mathsf{B})_1 = \mathsf{X}^d_1 \; {}_{s_{\mathbf{X}^d}}\!\times_{t_{\mathbf{B}}} \mathsf{B}_1,$$

$$s_{\mathbf{X}^d \bowtie \mathbf{B}}(y,(a,x)) = x, \quad t_{\mathbf{X}^d \bowtie \mathbf{B}}(y,(a,x)) = y, \quad id_{\mathbf{X}^d \bowtie \mathbf{B}}(x) = (x,(e_A,x)),$$
$$(y,(a,x)).{}_{\Psi}(x,(b,t)) = (y,(a \cdot b, t))$$

y

$$\lambda_{\mathbf{X}^d \bowtie \mathbf{B}}(y,(a,x)) = (\psi_X(a^{-1},y),(a^{-1},y)).$$

Referencias.

- J.N. Alonso Álvarez, J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez: Quasigroupoids and weak Hopf quasigroups, J. Algebra 568 (2021), 408-436.
- R. González Rodríguez, R.: Weak Hopf quasigroups and matched pairs of quasigroupoids, arXiv:2403.09231 (2024).

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles