Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ramón González Rodríguez

CENTRO DE INVESTIGACIÓN E TECNOLOXÍA MATEMÁTICA DE GALICIA

Universida de Vigo

Escuela de la Red de Álgebra no Conmutativa (Nc-Alg)

PARTE 3: Cuasigrupos de Hopf débiles

Almería, 8-12 de julio de 2024

GOBIERNO DE ESPAÑA MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN

Ministerio de Ciencia e Innovación. Agencia Estatal de Investigación
Unión Europea – Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER)
RED2022-134631-T

Índice

Cuasigrupos de Hopf débiles

En esta sección asumiremos que C es una categoría monoidal trenzada estricta con producto tensor $\otimes$, objeto unidad K y trenza c. También asumiremos que en C todo morfismo idempotente rompe.

Definición

Dado A un objeto de C, la terna (A, η_A, μ_A) es un magma unitario, si $\eta_A : K \to A$ (unidad) y $\mu_A : A \otimes A \to A$ (producto) son morfismos en C tales que

$$\mu_A \circ (A \otimes \eta_A) = id_A = \mu_A \circ (\eta_A \otimes A).$$

Definición

Dado A un objeto de C, la terna (A, η_A, μ_A) es un magma unitario, si $\eta_A : K \to A$ (unidad) y $\mu_A : A \otimes A \to A$ (producto) son morfismos en C tales que

$$\mu_A \circ (A \otimes \eta_A) = id_A = \mu_A \circ (\eta_A \otimes A).$$

Si (A, η_A, μ_A) es una magma unitario y se cumple la propiedad asociativa

$$\mu_A \circ (A \otimes \mu_A) = \mu_A \circ (\mu_A \otimes A)$$

diremos que es un álgebra.

Definición

Dado A un objeto de C, la terna (A, η_A, μ_A) es un magma unitario, si $\eta_A : K \to A$ (unidad) y $\mu_A : A \otimes A \to A$ (producto) son morfismos en C tales que

$$\mu_A \circ (A \otimes \eta_A) = id_A = \mu_A \circ (\eta_A \otimes A).$$

Si (A, η_A, μ_A) es una magma unitario y se cumple la propiedad asociativa

$$\mu_A \circ (A \otimes \mu_A) = \mu_A \circ (\mu_A \otimes A)$$

diremos que es un álgebra.

Sean (A, η_A, μ_A) y (B, η_B, μ_B) magmas unitarios (álgebras). Un morfismo

$$f : A \to B$$

en C es un morfismo de magmas unitarios (álgebras) si:

$$\eta_B = f \circ \eta_A, \quad f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f).$$

Definición

Dado un objeto C en C, la terna $(C, \varepsilon_C, \delta_C)$ es un comagma counitario con counidad ε_C y comultiplicación δ_C si

$$(\varepsilon_C \otimes C) \circ \delta_C = id_C = (C \otimes \varepsilon_C) \circ \delta_C$$

Definición

Dado un objeto C en C, la terna $(C, \varepsilon_C, \delta_C)$ es un comagma counitario con counidad ε_C y comultiplicación δ_C si

$$(\varepsilon_C \otimes C) \circ \delta_C = id_C = (C \otimes \varepsilon_C) \circ \delta_C$$

Dado un comagma counitario $(C, \varepsilon_C, \delta_C)$, cuando se cumple la propiedad coasociativa

$$(\delta_C \otimes C) \circ \delta_C = (C \otimes \delta_C) \circ \delta_C$$

diremos que $(C, \varepsilon_C, \delta_C)$ es una coálgebra.

Definición

Dado un objeto C en C, la terna $(C, \varepsilon_C, \delta_C)$ es un comagma counitario con counidad ε_C y comultiplicación δ_C si

$$(\varepsilon_C \otimes C) \circ \delta_C = id_C = (C \otimes \varepsilon_C) \circ \delta_C$$

Dado un comagma counitario $(C, \varepsilon_C, \delta_C)$, cuando se cumple la propiedad coasociativa

$$(\delta_C \otimes C) \circ \delta_C = (C \otimes \delta_C) \circ \delta_C$$

diremos que $(C, \varepsilon_C, \delta_C)$ es una coálgebra.

Sean $(C, \varepsilon_C, \delta_C)$ y $(D, \varepsilon_D, \delta_D)$ comagmas counitarios (coálgebras). Un morfismo

$$f : C \to D$$

en C es un morfismo de comagmas counitarios (coálgebras) si:

$$\varepsilon_C = \varepsilon_D \circ f, \quad \delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \delta_C.$$

Definición

Dado un objeto C en C, la terna $(C, \varepsilon_C, \delta_C)$ es un comagma counitario con counidad ε_C y comultiplicación δ_C si

$$(\varepsilon_C \otimes C) \circ \delta_C = id_C = (C \otimes \varepsilon_C) \circ \delta_C$$

Dado un comagma counitario $(C, \varepsilon_C, \delta_C)$, cuando se cumple la propiedad coasociativa

$$(\delta_C \otimes C) \circ \delta_C = (C \otimes \delta_C) \circ \delta_C$$

diremos que $(C, \varepsilon_C, \delta_C)$ es una coálgebra.

Sean $(C, \varepsilon_C, \delta_C)$ y $(D, \varepsilon_D, \delta_D)$ comagmas counitarios (coálgebras). Un morfismo

$$f : C \to D$$

en C es un morfismo de comagmas counitarios (coálgebras) si:

$$\varepsilon_C = \varepsilon_D \circ f, \quad \delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \delta_C.$$

Sea $(C, \varepsilon_C, \delta_C)$ un (una) comagma counitario (coálgebra). Diremos que C es coconmutativa si

$$\delta_C = c_{C,C} \circ \delta_C.$$

Definición

Si $f, g : C \to A$ son dos morfismos entre un comagma counitario C y un magma unitario A, $f * g$ denota el producto dado por la convolución

$$f * g = \mu_A \circ (f \otimes g) \circ \delta_C.$$

Definición

Si $f, g : C \to A$ son dos morfismos entre un comagma counitario C y un magma unitario A, $f * g$ denota el producto dado por la convolución

$$f * g = \mu_A \circ (f \otimes g) \circ \delta_C.$$

Si A, B son magmas unitarios (álgebras) en C, el objeto $A \otimes B$ es un magma unitario (álgebra) en C, donde

$$\eta_{A\otimes B} = \eta_A \otimes \eta_B$$

y

$$\mu_{A\otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (A \otimes c_{B,A} \otimes B).$$

Definición

Si $f, g : C \to A$ son dos morfismos entre un comagma counitario C y un magma unitario A, $f * g$ denota el producto dado por la convolución

$$f * g = \mu_A \circ (f \otimes g) \circ \delta_C.$$

Si A, B son magmas unitarios (álgebras) en C, el objeto $A \otimes B$ es un magma unitario (álgebra) en C, donde

$$\eta_{A\otimes B} = \eta_A \otimes \eta_B$$

y

$$\mu_{A\otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (A \otimes c_{B,A} \otimes B).$$

Si D, E son comagmas counitarios (coálgebras) en C, el objeto $D \otimes E$ es un comagma counitario (coálgebra) en C, donde

$$\varepsilon_{D\otimes E} = \varepsilon_D \otimes \varepsilon_E$$

y

$$\delta_{D\otimes E} = (D \otimes c_{D,E} \otimes E) \circ (\delta_D \otimes \delta_E).$$

Definición

Una biálgebra no asociativa débil H en C es un magma unitario (H, η_H, μ_H) y una coálgebra $(H, \varepsilon_H, \delta_H)$ tal que se cumplen los siguientes axiomas:

(1) $\delta_H \circ \mu_H = (\mu_H \otimes \mu_H) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H)$.

(2) $$\begin{aligned} &\varepsilon_H \circ \mu_H \circ (\mu_H \otimes H) = \varepsilon_H \circ \mu_H \circ (H \otimes \mu_H) \\ &= ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (H \otimes \delta_H \otimes H) \\ &= ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (H \otimes (c_{H,H}^{-1} \circ \delta_H) \otimes H). \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} &(\delta_H \otimes H) \circ \delta_H \circ \eta_H = (H \otimes \delta_H) \circ \delta_H \circ \eta_H \\ &= (H \otimes \mu_H \otimes H) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes (\delta_H \circ \eta_H)) \\ &= (H \otimes (\mu_H \circ c_{H,H}^{-1}) \otimes H) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes (\delta_H \circ \eta_H)). \end{aligned}$$

Definición

Una biálgebra no asociativa débil H en C es un magma unitario (H, η_H, μ_H) y una coálgebra $(H, \varepsilon_H, \delta_H)$ tal que se cumplen los siguientes axiomas:

(1) $\delta_H \circ \mu_H = (\mu_H \otimes \mu_H) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H)$.

(2)
$$\begin{aligned} &\varepsilon_H \circ \mu_H \circ (\mu_H \otimes H) = \varepsilon_H \circ \mu_H \circ (H \otimes \mu_H) \\ &= ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (H \otimes \delta_H \otimes H) \\ &= ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (H \otimes (c^{-1}_{H,H} \circ \delta_H) \otimes H). \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} &(\delta_H \otimes H) \circ \delta_H \circ \eta_H = (H \otimes \delta_H) \circ \delta_H \circ \eta_H \\ &= (H \otimes \mu_H \otimes H) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes (\delta_H \circ \eta_H)) \\ &= (H \otimes (\mu_H \circ c^{-1}_{H,H}) \otimes H) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes (\delta_H \circ \eta_H)). \end{aligned}$$

- Si el producto μ_H es asociativo, la noción previa es la de biálgebra débil en una categoría monoidal trenzada.

Definición

Una biálgebra no asociativa débil H en C es un magma unitario (H, η_H, μ_H) y una coálgebra $(H, \varepsilon_H, \delta_H)$ tal que se cumplen los siguientes axiomas:

(1) $\delta_H \circ \mu_H = (\mu_H \otimes \mu_H) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H)$.

(2)
$$\begin{aligned} &\varepsilon_H \circ \mu_H \circ (\mu_H \otimes H) = \varepsilon_H \circ \mu_H \circ (H \otimes \mu_H) \\ &= ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (H \otimes \delta_H \otimes H) \\ &= ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (H \otimes (c_{H,H}^{-1} \circ \delta_H) \otimes H). \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} &(\delta_H \otimes H) \circ \delta_H \circ \eta_H = (H \otimes \delta_H) \circ \delta_H \circ \eta_H \\ &= (H \otimes \mu_H \otimes H) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes (\delta_H \circ \eta_H)) \\ &= (H \otimes (\mu_H \circ c_{H,H}^{-1}) \otimes H) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes (\delta_H \circ \eta_H)). \end{aligned}$$

- Si el producto μ_H es asociativo, la noción previa es la de biálgebra débil en una categoría monoidal trenzada.

- Si el producto μ_H es asociativo y ε_H y δ_H son morfismos de álgebras, tenemos la noción de biálgebra en una categoría monoidal trenzada.

Definición

Una biálgebra no asociativa débil H en C es un magma unitario (H, η_H, μ_H) y una coálgebra $(H, \varepsilon_H, \delta_H)$ tal que se cumplen los siguientes axiomas:

(1) $\delta_H \circ \mu_H = (\mu_H \otimes \mu_H) \circ (H \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H)$.

(2)
$$\begin{aligned} &\varepsilon_H \circ \mu_H \circ (\mu_H \otimes H) = \varepsilon_H \circ \mu_H \circ (H \otimes \mu_H) \\ &= ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (H \otimes \delta_H \otimes H) \\ &= ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (H \otimes (c^{-1}_{H,H} \circ \delta_H) \otimes H). \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} &(\delta_H \otimes H) \circ \delta_H \circ \eta_H = (H \otimes \delta_H) \circ \delta_H \circ \eta_H \\ &= (H \otimes \mu_H \otimes H) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes (\delta_H \circ \eta_H)) \\ &= (H \otimes (\mu_H \circ c^{-1}_{H,H}) \otimes H) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes (\delta_H \circ \eta_H)). \end{aligned}$$

- Si el producto μ_H es asociativo, la noción previa es la de biálgebra débil en una categoría monoidal trenzada.
- Si el producto μ_H es asociativo y ε_H y δ_H son morfismos de álgebras, tenemos la noción de biálgebra en una categoría monoidal trenzada.
- Si ε_H y δ_H son morfismos de magmas unitarios, tenemos la noción de biálgebra no asociativa en una categoría monoidal trenzada.

Definición

Un cuasigrupo de Hopf débil H en C es una biálgebra no asociativa débil H para la que existe un endomorfismo $\lambda_H : H \to H$ in C (llamado antípoda de H) tal que, si denotamos por Π_H^L (morfismo codominio) y por Π_H^R (morfismo dominio) los morfismos

$$\Pi_H^L = ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes H),$$

$$\Pi_H^R = (H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (c_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes (\delta_H \circ \eta_H)),$$

se cumplen las siguientes igualdades:

(1) $\Pi_H^L = id_H * \lambda_H$.

(2) $\Pi_H^R = \lambda_H * id_H$.

(3) $\lambda_H * \Pi_H^L = \Pi_H^R * \lambda_H = \lambda_H$.

(4) $\mu_H \circ (\lambda_H \otimes \mu_H) \circ (\delta_H \otimes H) = \mu_H \circ (\Pi_H^R \otimes H)$.

(5) $\mu_H \circ (H \otimes \mu_H) \circ (H \otimes \lambda_H \otimes H) \circ (\delta_H \otimes H) = \mu_H \circ (\Pi_H^L \otimes H)$.

(6) $\mu_H \circ (\mu_H \otimes \lambda_H) \circ (H \otimes \delta_H) = \mu_H \circ (H \otimes \Pi_H^L)$.

(7) $\mu_H \circ (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \lambda_H \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H) = \mu_H \circ (H \otimes \Pi_H^R)$.

- Si el producto μ_H es asociativo, la noción previa es la de álgebra de Hopf débil en una categoría trenzada introducida en:

    J.N. Alonso Álvarez , J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, Weak braided Hopf algebras, Indiana University Mathematics Journal 57, No. 5 (2008) 2423-2458.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

- Si el producto μ_H es asociativo, la noción previa es la de álgebra de Hopf débil en una categoría trenzada introducida en:

  J.N. Alonso Álvarez , J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, Weak braided Hopf algebras, Indiana University Mathematics Journal 57, No. 5 (2008) 2423-2458.

- Si el producto μ_H es asociativo y $\mathsf{C} = \mathbb{F}$-Vect, los cuasigrupos de Hopf débiles son las álgebras de Hopf débiles introducidas por:

  G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi, Weak Hopf algebras, I. Integral theory and C^*-structure, J. Algebra 221 (1999), 385-438.

- Si el producto μ_H es asociativo, la noción previa es la de álgebra de Hopf débil en una categoría trenzada introducida en:

  J.N. Alonso Álvarez , J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, Weak braided Hopf algebras, Indiana University Mathematics Journal 57, No. 5 (2008) 2423-2458.

- Si el producto μ_H es asociativo y $\mathsf{C} = \mathbb{F}$-Vect, los cuasigrupos de Hopf débiles son las álgebras de Hopf débiles introducidas por:

  G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi, Weak Hopf algebras, I. Integral theory and C^*-structure, J. Algebra 221 (1999), 385-438.

- Si el producto μ_H es asociativo y la counidad ε_H y la comultiplicación δ_H son morfismos de álgebras, tenemos la noción de álgebra de Hopf en una categoría trenzada.

- Si el producto μ_H es asociativo, la noción previa es la de álgebra de Hopf débil en una categoría trenzada introducida en:

  J.N. Alonso Álvarez , J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, Weak braided Hopf algebras, Indiana University Mathematics Journal 57, No. 5 (2008) 2423-2458.

- Si el producto μ_H es asociativo y $\mathsf{C} = \mathbb{F}$-Vect, los cuasigrupos de Hopf débiles son las álgebras de Hopf débiles introducidas por:

  G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi, Weak Hopf algebras, I. Integral theory and C^*-structure, J. Algebra 221 (1999), 385-438.

- Si el producto μ_H es asociativo y la counidad ε_H y la comultiplicación δ_H son morfismos de álgebras, tenemos la noción de álgebra de Hopf en una categoría trenzada.

- Si ε_H y δ_H son morfismos de magmas unitarios, tenemos la noción de cuasigrupo de Hopf en una categoría trenzada.
  En el caso particular $\mathsf{C} = \mathbb{F}$-Vect, tenemos la noción de cuasigrupo de Hopf introducida en:

  J. Klim, S. Majid, Hopf quasigroups and the algebraic 7-sphere, J. Algebra 323 (2010), 3067-3110.

Definición.

Un álgebra de Hopf débil H en C es una biálgebra débil H para la que existe un endomorfismo $\lambda_H : H \to H$ in C (llamado antípoda de H) tal que, si denotamos por Π_H^L (morfismo codominio) y por Π_H^R (morfismo dominio) los morfismos

$$\Pi_H^L = ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes H),$$

$$\Pi_H^R = (H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (c_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes (\delta_H \circ \eta_H)),$$

se cumplen las siguientes igualdades:

(1) $\Pi_H^L = id_H * \lambda_H$.

(2) $\Pi_H^R = \lambda_H * id_H$.

(3) $\lambda_H * \Pi_H^L = \Pi_H^R * \lambda_H = \lambda_H$.

Definición

Un cuasigrupo de Hopf H en C es un magma unitario (H, η_H, μ_H) y una coálgebra $(H, \varepsilon_H, \delta_H)$ tal que:

(1) $H = (H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \delta_H)$ es una biálgebra no asociativa.

(2) Existe un morfismo $\lambda_H : H \to H$ en C (llamado antípoda de H) tal que:

$$\mu_H \circ (\lambda_H \otimes \mu_H) \circ (\delta_H \otimes H) = \varepsilon_H \otimes H = \mu_H \circ (H \otimes \mu_H) \circ (H \otimes \lambda_H \otimes H) \circ (\delta_H \otimes H),$$

$$\mu_H \circ (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \lambda_H \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H) = H \otimes \varepsilon_H = \mu_H \circ (\mu_H \otimes \lambda_H) \circ (H \otimes \delta_H).$$

Definición

Un cuasigrupo de Hopf H en C es un magma unitario (H, η_H, μ_H) y una coálgebra $(H, \varepsilon_H, \delta_H)$ tal que:

(1) $H = (H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \delta_H)$ es una biálgebra no asociativa.

(2) Existe un morfismo $\lambda_H : H \to H$ en C (llamado antípoda de H) tal que:

$$\mu_H \circ (\lambda_H \otimes \mu_H) \circ (\delta_H \otimes H) = \varepsilon_H \otimes H = \mu_H \circ (H \otimes \mu_H) \circ (H \otimes \lambda_H \otimes H) \circ (\delta_H \otimes H),$$

$$\mu_H \circ (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \lambda_H \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H) = H \otimes \varepsilon_H = \mu_H \circ (\mu_H \otimes \lambda_H) \circ (H \otimes \delta_H).$$

Nótese que las anteriores igualdades implican que

$$\lambda_H * id_H = \varepsilon_H \otimes \eta_H = id_H * \lambda_H.$$

Definición

Un álgebra de Hopf H en C es un álgebra (H, η_H, μ_H) y una coálgebra $(H, \varepsilon_H, \delta_H)$ tal que:

(1) $H = (H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \delta_H)$ es una biálgebra.

(2) Existe un morfismo $\lambda_H : H \to H$ en C (llamado antípoda de H) tal que:

$$\lambda_H * id_H = \varepsilon_H \otimes \eta_H = id_H * \lambda_H.$$

Ejemplos

- En la categoría Set los cuasigrupos de Hopf son los (lazos con inversos) cuasigrupos en el sentido de J. Klim y S. Majid.

    J. Klim, S. Majid: Hopf quasigroups and the algebraic 7-sphere, J. Algebra 323 (2010), 3067-3110.

Ejemplos

- En la categoría Set los cuasigrupos de Hopf son los (lazos con inversos) cuasigrupos en el sentido de J. Klim y S. Majid.

  J. Klim, S. Majid: Hopf quasigroups and the algebraic 7-sphere, J. Algebra 323 (2010), 3067-3110.

- En la categoría Set las álgebras de Hopf son los grupos.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\Pi_H^L \circ \eta_H = \eta_H = \Pi_H^R \circ \eta_H$.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\Pi_H^L \circ \eta_H = \eta_H = \Pi_H^R \circ \eta_H$.

(ii) $\varepsilon_H \circ \Pi_H^L = \varepsilon_H = \varepsilon_H \circ \Pi_H^R$.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\Pi_H^L \circ \eta_H = \eta_H = \Pi_H^R \circ \eta_H$.

(ii) $\varepsilon_H \circ \Pi_H^L = \varepsilon_H = \varepsilon_H \circ \Pi_H^R$.

(iii) $\Pi_H^L * id_H = id_H * \Pi_H^R = id_H$.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\Pi_H^L \circ \eta_H = \eta_H = \Pi_H^R \circ \eta_H$.

(ii) $\varepsilon_H \circ \Pi_H^L = \varepsilon_H = \varepsilon_H \circ \Pi_H^R$.

(iii) $\Pi_H^L * id_H = id_H * \Pi_H^R = id_H$.

(iv) El morfismo antípoda es único.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\Pi_H^L \circ \eta_H = \eta_H = \Pi_H^R \circ \eta_H$.

(ii) $\varepsilon_H \circ \Pi_H^L = \varepsilon_H = \varepsilon_H \circ \Pi_H^R$.

(iii) $\Pi_H^L * id_H = id_H * \Pi_H^R = id_H$.

(iv) El morfismo antípoda es único.

(v) $\lambda_H \circ \eta_H = \eta_H$.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\Pi_H^L \circ \eta_H = \eta_H = \Pi_H^R \circ \eta_H$.

(ii) $\varepsilon_H \circ \Pi_H^L = \varepsilon_H = \varepsilon_H \circ \Pi_H^R$.

(iii) $\Pi_H^L * id_H = id_H * \Pi_H^R = id_H$.

(iv) El morfismo antípoda es único.

(v) $\lambda_H \circ \eta_H = \eta_H$.

(vi) $\varepsilon_H \circ \lambda_H = \varepsilon_H$.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\Pi_H^L \circ \eta_H = \eta_H = \Pi_H^R \circ \eta_H$.

(ii) $\varepsilon_H \circ \Pi_H^L = \varepsilon_H = \varepsilon_H \circ \Pi_H^R$.

(iii) $\Pi_H^L * id_H = id_H * \Pi_H^R = id_H$.

(iv) El morfismo antípoda es único.

(v) $\lambda_H \circ \eta_H = \eta_H$.

(vi) $\varepsilon_H \circ \lambda_H = \varepsilon_H$.

Para todo cuasigrupo de Hopf débil también podemos definir los siguientes morfismos:

$$\overline{\Pi}_H^L = (H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes H) : H \to H,$$

$$\overline{\Pi}_H^R = ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes H) \circ (H \otimes (\delta_H \circ \eta_H)) : H \to H.$$

Teorema

Sea H una biálgebra no asosciativa débil. Los morfismos Π_H^L, Π_H^R, $\overline{\Pi}_H^L$ y $\overline{\Pi}_H^R$ son idempotentes.

Teorema

Sea H una biálgebra no asosciativa débil. Los morfismos Π_H^L, Π_H^R, $\overline{\Pi}_H^L$ y $\overline{\Pi}_H^R$ son idempotentes.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\mu_H \circ (H \otimes \Pi_H^L) = ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ (\delta_H \otimes H)$.

(ii) $\mu_H \circ (\Pi_H^R \otimes H) = (H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (c_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H)$.

(iii) $\mu_H \circ (H \otimes \overline{\Pi}_H^L) = (H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (\delta_H \otimes H)$.

(iv) $\mu_H \circ (\overline{\Pi}_H^R \otimes H) = ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H)$.

Teorema

Sea H una biálgebra no asociativa débil. Los morfismos Π_H^L, Π_H^R, $\overline{\Pi}_H^L$ y $\overline{\Pi}_H^R$ son idempotentes.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\mu_H \circ (H \otimes \Pi_H^L) = ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ (\delta_H \otimes H)$.

(ii) $\mu_H \circ (\Pi_H^R \otimes H) = (H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (c_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H)$.

(iii) $\mu_H \circ (H \otimes \overline{\Pi}_H^L) = (H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (\delta_H \otimes H)$.

(iv) $\mu_H \circ (\overline{\Pi}_H^R \otimes H) = ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H)$.

(v) $(H \otimes \Pi_H^L) \circ \delta_H = (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes H)$.

(vi) $(\Pi_H^R \otimes H) \circ \delta_H = (H \otimes \mu_H) \circ (c_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes (\delta_H \circ \eta_H))$.

(vii) $(\overline{\Pi}_H^L \otimes H) \circ \delta_H = (H \otimes \mu_H) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes H)$.

(viii) $(H \otimes \overline{\Pi}_H^R) \circ \delta_H = (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes (\delta_H \circ \eta_H))$.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\Pi_H^L \circ \overline{\Pi}_H^L = \Pi_H^L, \quad \Pi_H^L \circ \overline{\Pi}_H^R = \overline{\Pi}_H^R.$

(ii) $\overline{\Pi}_H^L \circ \Pi_H^L = \overline{\Pi}_H^L, \quad \overline{\Pi}_H^R \circ \Pi_H^L = \Pi_H^L.$

(iii) $\Pi_H^R \circ \overline{\Pi}_H^L = \overline{\Pi}_H^L, \quad \Pi_H^R \circ \overline{\Pi}_H^R = \Pi_H^R.$

(iv) $\overline{\Pi}_H^L \circ \Pi_H^R = \Pi_H^R, \quad \overline{\Pi}_H^R \circ \Pi_H^R = \overline{\Pi}_H^R.$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\Pi_H^L \circ \overline{\Pi}_H^L = \Pi_H^L, \quad \Pi_H^L \circ \overline{\Pi}_H^R = \overline{\Pi}_H^R.$

(ii) $\overline{\Pi}_H^L \circ \Pi_H^L = \overline{\Pi}_H^L, \quad \overline{\Pi}_H^R \circ \Pi_H^L = \Pi_H^L.$

(iii) $\Pi_H^R \circ \overline{\Pi}_H^L = \overline{\Pi}_H^L, \quad \Pi_H^R \circ \overline{\Pi}_H^R = \Pi_H^R.$

(iv) $\overline{\Pi}_H^L \circ \Pi_H^R = \Pi_H^R, \quad \overline{\Pi}_H^R \circ \Pi_H^R = \overline{\Pi}_H^R.$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\Pi_H^L \circ \lambda_H = \Pi_H^L \circ \Pi_H^R = \lambda_H \circ \Pi_H^R.$

(ii) $\Pi_H^R \circ \lambda_H = \Pi_H^R \circ \Pi_H^L = \lambda_H \circ \Pi_H^L.$

(iii) $\Pi_H^L = \overline{\Pi}_H^R \circ \lambda_H = \lambda_H \circ \overline{\Pi}_H^L.$

(iv) $\Pi_H^R = \overline{\Pi}_H^L \circ \lambda_H = \lambda_H \circ \overline{\Pi}_H^R.$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\Pi_H^L \circ \mu_H \circ (H \otimes \Pi_H^L) = \Pi_H^L \circ \mu_H$,

(ii) $\Pi_H^R \circ \mu_H \circ (\Pi_H^R \otimes H) = \Pi_H^R \circ \mu_H$,

(iii) $(H \otimes \Pi_H^L) \circ \delta_H \circ \Pi_H^L = \delta_H \circ \Pi_H^L$,

(iv) $(\Pi_H^R \otimes H) \circ \delta_H \circ \Pi_H^R = \delta_H \circ \Pi_H^R$,

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\Pi_H^L \circ \mu_H \circ (H \otimes \Pi_H^L) = \Pi_H^L \circ \mu_H$,

(ii) $\Pi_H^R \circ \mu_H \circ (\Pi_H^R \otimes H) = \Pi_H^R \circ \mu_H$,

(iii) $(H \otimes \Pi_H^L) \circ \delta_H \circ \Pi_H^L = \delta_H \circ \Pi_H^L$,

(iv) $(\Pi_H^R \otimes H) \circ \delta_H \circ \Pi_H^R = \delta_H \circ \Pi_H^R$,

(v) $\overline{\Pi}_H^L \circ \mu_H \circ (H \otimes \Pi_H^L) = \overline{\Pi}_H^L \circ \mu_H$,

(vi) $\overline{\Pi}_H^R \circ \mu_H \circ (\Pi_H^R \otimes H) = \overline{\Pi}_H^R \circ \mu_H$,

(vii) $(\Pi_H^R \otimes H) \circ \delta_H \circ \overline{\Pi}_H^L = \delta_H \circ \overline{\Pi}_H^L$,

(viii) $(H \otimes \Pi_H^L) \circ \delta_H \circ \overline{\Pi}_H^R = \delta_H \circ \overline{\Pi}_H^R$.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\mu_H \circ (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes ((\Pi_H^L \otimes H) \circ \delta_H)) = \mu_H = \mu_H \circ (\mu_H \otimes \Pi_H^R) \circ (H \otimes \delta_H)$,

(ii) $\mu_H \circ (\Pi_H^L \otimes \mu_H) \circ (\delta_H \otimes H) = \mu_H = \mu_H \circ (H \otimes (\mu_H \circ (\Pi_H^R \otimes H))) \circ (\delta_H \otimes H)$,

(iii) $\mu_H \circ (\lambda_H \otimes (\mu_H \circ (\Pi_H^L \otimes H))) \circ (\delta_H \otimes H) = \mu_H \circ (\lambda_H \otimes H)$
$= \mu_H \circ (\Pi_H^R \otimes (\mu_H \circ (\lambda_H \otimes H))) \circ (\delta_H \otimes H)$,

(iv) $\mu_H \circ (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes ((\lambda_H \otimes \Pi_H^L) \circ \delta_H)) = \mu_H \circ (H \otimes \lambda_H)$
$= \mu_H \circ (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes ((\Pi_H^R \otimes \lambda_H) \circ \delta_H))$.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\mu_H \circ (\Pi_H^L \otimes \Pi_H^R) = \mu_H \circ c_{H,H}^{-1} \circ (\Pi_H^L \otimes \Pi_H^R)$,

(ii) $(\Pi_H^L \otimes \Pi_H^R) \circ \delta_H = (\Pi_H^L \otimes \Pi_H^R) \circ c_{H,H}^{-1} \circ \delta_H$,

(iii) $\mu_H \circ (\Pi_H^R \otimes \Pi_H^L) = \mu_H \circ c_{H,H} \circ (\Pi_H^R \otimes \Pi_H^L)$,

(iv) $(\Pi_H^R \otimes \Pi_H^L) \circ \delta_H = (\Pi_H^R \otimes \Pi_H^L) \circ c_{H,H} \circ \delta_H$.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\mu_H \circ (\Pi_H^L \otimes \Pi_H^R) = \mu_H \circ c_{H,H}^{-1} \circ (\Pi_H^L \otimes \Pi_H^R)$,

(ii) $(\Pi_H^L \otimes \Pi_H^R) \circ \delta_H = (\Pi_H^L \otimes \Pi_H^R) \circ c_{H,H}^{-1} \circ \delta_H$,

(iii) $\mu_H \circ (\Pi_H^R \otimes \Pi_H^L) = \mu_H \circ c_{H,H} \circ (\Pi_H^R \otimes \Pi_H^L)$,

(iv) $(\Pi_H^R \otimes \Pi_H^L) \circ \delta_H = (\Pi_H^R \otimes \Pi_H^L) \circ c_{H,H} \circ \delta_H$.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. El morfismo antípoda de H es antimultiplicativo y anticomultiplicativo. Esto es:

$$\lambda_H \circ \mu_H = \mu_H \circ c_{H,H} \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H),$$

$$\delta_H \circ \lambda_H = (\lambda_H \otimes \lambda_H) \circ c_{H,H} \circ \delta_H.$$

Teorema

Sea H una biálgebra no asociativa débil. Sea $H_L = Im(\Pi_H^L)$ y sean $p_L : H \to H_L$ e $i_L : H_L \to H$ los morfismos tales que $\Pi_H^L = i_L \circ p_L$ y $p_L \circ i_L = id_{H_L}$. Entonces,

$$\begin{tikzcd} H_L \arrow[r, "i_L"] & H \arrow[r, shift left, "\delta_H"] \arrow[r, shift right, "(H\otimes \Pi_H^L)\circ\delta_H"'] & H\otimes H \end{tikzcd}$$

es un diagrama igualador y

$$\begin{tikzcd} H\otimes H \arrow[r, shift left, "\mu_H"] \arrow[r, shift right, "\mu_H\circ(H\otimes \Pi_H^L)"'] & H \arrow[r, "p_L"] & H_L \end{tikzcd}$$

es un diagrama coigualador.

Teorema

Sea H una biálgebra no asociativa débil. Sea $H_L = Im(\Pi_H^L)$ y sean $p_L : H \to H_L$ e $i_L : H_L \to H$ los morfismos tales que $\Pi_H^L = i_L \circ p_L$ y $p_L \circ i_L = id_{H_L}$. Entonces,

$$
\begin{tikzcd}
H_L \arrow[r, "i_L"] & H \arrow[r, shift left, "\delta_H"] \arrow[r, shift right, "(H \otimes \Pi_H^L) \circ \delta_H"'] & H \otimes H
\end{tikzcd}
$$

es un diagrama igualador y

$$
\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, shift left, "\mu_H"] \arrow[r, shift right, "\mu_H \circ (H \otimes \Pi_H^L)"'] & H \arrow[r, "p_L"] & H_L
\end{tikzcd}
$$

es un diagrama coigualador.

Como consecuencia, $(H_L, \eta_{H_L} = p_L \circ \eta_H, \mu_{H_L} = p_L \circ \mu_H \circ (i_L \otimes i_L))$ es un magma unitario en C. Por otro lado,

$$(H_L, \varepsilon_{H_L} = \varepsilon_H \circ i_L, \delta_H = (p_L \otimes p_L) \circ \delta_H \circ i_L)$$

es una coálgebra en C.

Teorema

Sea H una biálgebra no asociativa débil. Se cumplen las siguientes identidades:

$$\mu_H \circ ((\mu_H \circ (i_L \otimes H)) \otimes H) = \mu_H \circ (i_L \otimes \mu_H),$$

$$\mu_H \circ (H \otimes (\mu_H \circ (i_L \otimes H))) = \mu_H \circ ((\mu_H \circ (H \otimes i_L)) \otimes H),$$

$$\mu_H \circ (H \otimes (\mu_H \circ (H \otimes i_L))) = \mu_H \circ (\mu_H \otimes i_L).$$

Como consecuencia H_L es un álgebra en C.

Teorema

Sea H una biálgebra no asociativa débil. Se cumplen las siguientes identidades:

$$\mu_H \circ ((\mu_H \circ (i_L \otimes H)) \otimes H) = \mu_H \circ (i_L \otimes \mu_H),$$

$$\mu_H \circ (H \otimes (\mu_H \circ (i_L \otimes H))) = \mu_H \circ ((\mu_H \circ (H \otimes i_L)) \otimes H),$$

$$\mu_H \circ (H \otimes (\mu_H \circ (H \otimes i_L))) = \mu_H \circ (\mu_H \otimes i_L).$$

Como consecuencia H_L es un álgebra en C.

Si $H_R = Im(\Pi_H^R)$, tenemos propiedades similares y, por lo tanto, H_R es un álgebra en C.

$$\mu_H \circ ((\mu_H \circ (i_R \otimes H)) \otimes H) = \mu_H \circ (i_R \otimes \mu_H),$$

$$\mu_H \circ (H \otimes (\mu_H \circ (i_R \otimes H))) = \mu_H \circ ((\mu_H \circ (H \otimes i_R)) \otimes H),$$

$$\mu_H \circ (H \otimes (\mu_H \circ (H \otimes i_R))) = \mu_H \circ (\mu_H \otimes i_R).$$

Definición

Sean H y H' cuasigrupos de Hopf débiles. Diremos que un morfismo $f : H \to H'$ en C es un morfismo de cuasigrupos de Hopf débiles si es un morfismo de coálgebras tal que

$$\Pi^R_{H'} \circ f = f \circ \Pi^R_H,$$
$$\overline{\Pi}^L_{H'} \circ f = f \circ \overline{\Pi}^L_H,$$
$$\Pi^R_{H'} \circ \Pi^L_{H'} \circ f = f \circ \Pi^R_H \circ \Pi^L_H,$$
$$f \circ \mu_H = \mu_{H'} \circ (f \otimes f) \circ \nabla_H,$$

donde $\nabla_H : H \otimes H \to H \otimes H$ es el morfismo idempotente definido por

$$\nabla_H = (H \otimes (\mu_H \circ (\Pi^R_H \otimes H))) \circ (\delta_H \otimes H).$$

Definición

Sean H y H' cuasigrupos de Hopf débiles. Diremos que un morfismo $f : H \to H'$ en C es un morfismo de cuasigrupos de Hopf débiles si es un morfismo de coálgebras tal que

$$\Pi^R_{H'} \circ f = f \circ \Pi^R_H,$$
$$\overline{\Pi}^L_{H'} \circ f = f \circ \overline{\Pi}^L_H,$$
$$\Pi^R_{H'} \circ \Pi^L_{H'} \circ f = f \circ \Pi^R_H \circ \Pi^L_H,$$
$$f \circ \mu_H = \mu_{H'} \circ (f \otimes f) \circ \nabla_H,$$

donde $\nabla_H : H \otimes H \to H \otimes H$ es el morfismo idempotente definido por

$$\nabla_H = (H \otimes (\mu_H \circ (\Pi^R_H \otimes H))) \circ (\delta_H \otimes H).$$

- La definición anterior está inspirada en la introducida en

  G. Böhm, J. Gómez-Torrecillas, E. López Centella: On the category of weak bialgebras, J. Algebra 399 (2014), 801-844.

  para álgebras de Hopf débiles.

Definición

Sean H y H' cuasigrupos de Hopf débiles. Diremos que un morfismo $f : H \to H'$ en C es un morfismo de cuasigrupos de Hopf débiles si es un morfismo de coálgebras tal que

$$\Pi^R_{H'} \circ f = f \circ \Pi^R_H,$$
$$\overline{\Pi}^L_{H'} \circ f = f \circ \overline{\Pi}^L_H,$$
$$\Pi^R_{H'} \circ \Pi^L_{H'} \circ f = f \circ \Pi^R_H \circ \Pi^L_H,$$
$$f \circ \mu_H = \mu_{H'} \circ (f \otimes f) \circ \nabla_H,$$

donde $\nabla_H : H \otimes H \to H \otimes H$ es el morfismo idempotente definido por

$$\nabla_H = (H \otimes (\mu_H \circ (\Pi^R_H \otimes H))) \circ (\delta_H \otimes H).$$

- La definición anterior está inspirada en la introducida en

  G. Böhm, J. Gómez-Torrecillas, E. López Centella: On the category of weak bialgebras, J. Algebra 399 (2014), 801-844.

  para álgebras de Hopf débiles.

  Con CGHD denotaremos la categoría de cuasigrupos de Hopf débiles.

Cuasigrupos de Hopf débiles y morfismos de Galois

Sea H una biálgebra no asociativa débil. Se definen los Ω-morfismos como:

$$\Omega_L^1 = (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \Pi_H^L \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H),$$

$$\Omega_R^1 = (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \Pi_H^R \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H),$$

$$\Omega_L^2 = (H \otimes \mu_H) \circ (H \otimes \Pi_H^L \otimes H) \circ (\delta_H \otimes H),$$

$$\Omega_R^2 = (H \otimes \mu_H) \circ (H \otimes \Pi_H^R \otimes H) \circ (\delta_H \otimes H).$$

Estos morfismo son idempotentes y, como consecuencia, existen objetos $H \times_L^1 H$, $H \times_R^1 H$, $H \times_L^2 H$, $H \times_R^2 H$ y morfismos

$$q_L^1 : H \otimes H \to H \times_L^1 H, \quad j_L^1 : H \times_L^1 H \to H \otimes H,$$

$$q_R^1 : H \otimes H \to H \times_R^1 H, \quad j_R^1 : H \times_R^1 H \to H \otimes H,$$

$$q_L^2 : H \otimes H \to H \times_L^2 H, \quad j_L^2 : H \times_L^2 H \to H \otimes H,$$

$$q_R^2 : H \otimes H \to H \times_R^2 H, \quad j_R^2 : H \times_R^2 H \to H \otimes H,$$

tales que, para $\sigma \in \{L, R\}$ y $\alpha \in \{1, 2\}$,

$$j_\sigma^\alpha \circ p_\sigma^\alpha = \Omega_\sigma^\alpha, \quad p_\sigma^\alpha \circ j_\sigma^\alpha = id_{H \times_\sigma^\alpha H}.$$

Teorema

Sea H una biálgebra no asociativa débil.

(i) Los diagramas

$$H \otimes H_L \otimes H \underset{H \otimes (\mu_H \circ (i_L \otimes H))}{\overset{(\mu_H \circ (H \otimes i_L)) \otimes H}{\rightrightarrows}} H \otimes H \xrightarrow{q_L^1} H \times_L^1 H$$

y

$$H \otimes H_R \otimes H \underset{H \otimes (\mu_H \circ (i_R \otimes H))}{\overset{(\mu_H \circ (H \otimes i_R)) \otimes H}{\rightrightarrows}} H \otimes H \xrightarrow{q_R^2} H \times_R^2 H$$

son coigualadores.

Teorema

Sea H una biálgebra no asociativa débil.

(i) Los diagramas

$$\begin{tikzcd} H\otimes H_L\otimes H \arrow[r, shift left, "(\mu_H\circ(H\otimes i_L))\otimes H"] \arrow[r, shift right, "H\otimes(\mu_H\circ(i_L\otimes H))"'] & H\otimes H \arrow[r, "q_L^1"] & H\times_L^1 H \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} H\otimes H_R\otimes H \arrow[r, shift left, "(\mu_H\circ(H\otimes i_R))\otimes H"] \arrow[r, shift right, "H\otimes(\mu_H\circ(i_R\otimes H))"'] & H\otimes H \arrow[r, "q_R^2"] & H\times_R^2 H \end{tikzcd}$$

son coigualadores.

(ii) Los diagramas

$$\begin{tikzcd} H\times_L^2 H \arrow[r, "j_L^2"] & H\otimes H \arrow[r, shift left, "((H\otimes p_L)\circ\delta_H)\otimes H"] \arrow[r, shift right, "H\otimes((p_L\otimes H)\circ\delta_H)"'] & H\otimes H_L\otimes H \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} H\times_R^1 H \arrow[r, "j_R^1"] & H\otimes H \arrow[r, shift left, "((H\otimes p_R)\circ\delta_H)\otimes H"] \arrow[r, shift right, "H\otimes((p_R\otimes H)\circ\delta_H)"'] & H\otimes H_L\otimes H \end{tikzcd}$$

son igualadores.

Definición

Sea H un magma unitario. Diremos que un morfismo $\phi : H \otimes H \to H \otimes H$ es:

- H-cuasilineal por la izquierda, si $\phi = (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \phi) \circ (H \otimes \eta_H \otimes H)$.

Definición

Sea H un magma unitario. Diremos que un morfismo $\phi : H \otimes H \to H \otimes H$ es:

- H-cuasilineal por la izquierda, si $\phi = (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \phi) \circ (H \otimes \eta_H \otimes H)$.
- H-cuasilineal por la derecha, si $\phi = (H \otimes \mu_H) \circ (\phi \otimes H) \circ (H \otimes \eta_H \otimes H)$.

Definición

Sea H un magma unitario. Diremos que un morfismo $\phi : H \otimes H \to H \otimes H$ es:

- H-cuasilineal por la izquierda, si $\phi = (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \phi) \circ (H \otimes \eta_H \otimes H)$.
- H-cuasilineal por la derecha, si $\phi = (H \otimes \mu_H) \circ (\phi \otimes H) \circ (H \otimes \eta_H \otimes H)$.

Definición

Sea H un comagma counitario. Diremos que un morfismo $\phi : H \otimes H \to H \otimes H$ es:

Definición

Sea H un magma unitario. Diremos que un morfismo $\phi : H \otimes H \to H \otimes H$ es:

- H-cuasilineal por la izquierda, si $\phi = (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \phi) \circ (H \otimes \eta_H \otimes H)$.
- H-cuasilineal por la derecha, si $\phi = (H \otimes \mu_H) \circ (\phi \otimes H) \circ (H \otimes \eta_H \otimes H)$.

Definición

Sea H un comagma counitario. Diremos que un morfismo $\phi : H \otimes H \to H \otimes H$ es:

- H-cuasicolineal por la izquierda, si $\phi = (H \otimes \varepsilon_H \otimes H) \circ (H \otimes \phi) \circ (\delta_H \otimes H)$,

Definición

Sea H un magma unitario. Diremos que un morfismo $\phi : H \otimes H \to H \otimes H$ es:

- H-cuasilineal por la izquierda, si $\phi = (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \phi) \circ (H \otimes \eta_H \otimes H)$.
- H-cuasilineal por la derecha, si $\phi = (H \otimes \mu_H) \circ (\phi \otimes H) \circ (H \otimes \eta_H \otimes H)$.

Definición

Sea H un comagma counitario. Diremos que un morfismo $\phi : H \otimes H \to H \otimes H$ es:

- H-cuasicolineal por la izquierda, si $\phi = (H \otimes \varepsilon_H \otimes H) \circ (H \otimes \phi) \circ (\delta_H \otimes H)$,
- H-cuasicolineal por la derecha, si $\phi = (H \otimes \varepsilon_H \otimes H) \circ (\phi \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H)$.

Teorema

Sea H un magma unitario y comagma counitario.

(i) El morfismo de Galois por la derecha, dado por

$$\beta = (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H),$$

es H-cuasilineal por la izquierda y H-cuasicolineal por la derecha.

Teorema

Sea H un magma unitario y comagma counitario.

(i) El morfismo de Galois por la derecha, dado por

$$\beta = (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H),$$

es H-cuasilineal por la izquierda y H-cuasicolineal por la derecha.

(ii) El morfismo de Galois por la izquierda, dado por

$$\gamma = (H \otimes \mu_H) \circ (\delta_H \otimes H),$$

es H-cuasilineal por la derecha y H-cuasicolineal por la izquierda.

Teorema

Sea H un magma unitario y comagma counitario.

(i) El morfismo de Galois por la derecha, dado por

$$\beta = (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H),$$

es H-cuasilineal por la izquierda y H-cuasicolineal por la derecha.

(ii) El morfismo de Galois por la izquierda, dado por

$$\gamma = (H \otimes \mu_H) \circ (\delta_H \otimes H),$$

es H-cuasilineal por la derecha y H-cuasicolineal por la izquierda.

(iii) Los morfismos Ω_L^1 y Ω_R^1 son H-cuasilineales por la izquierda y H-cuasicolineales por la derecha.

Teorema

Sea H un magma unitario y comagma counitario.

(i) El morfismo de Galois por la derecha, dado por

$$\beta = (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H),$$

es H-cuasilineal por la izquierda y H-cuasicolineal por la derecha.

(ii) El morfismo de Galois por la izquierda, dado por

$$\gamma = (H \otimes \mu_H) \circ (\delta_H \otimes H),$$

es H-cuasilineal por la derecha y H-cuasicolineal por la izquierda.

(iii) Los morfismos Ω_L^1 y Ω_R^1 son H-cuasilineales por la izquierda y H-cuasicolineales por la derecha.

(iv) Los morfismos Ω_L^2 y Ω_R^2 son H-cuasilineales por la iderecha y H-cuasicolineales por la izquierda.

Teorema

Sea H un magma unitario y comagma counitario.

(i) El morfismo de Galois por la derecha, dado por

$$\beta = (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H),$$

es H-cuasilineal por la izquierda y H-cuasicolineal por la derecha.

(ii) El morfismo de Galois por la izquierda, dado por

$$\gamma = (H \otimes \mu_H) \circ (\delta_H \otimes H),$$

es H-cuasilineal por la derecha y H-cuasicolineal por la izquierda.

(iii) Los morfismos Ω_L^1 y Ω_R^1 son H-cuasilineales por la izquierda y H-cuasicolineales por la derecha.

(iv) Los morfismos Ω_L^2 y Ω_R^2 son H-cuasilineales por la iderecha y H-cuasicolineales por la izquierda.

También podemos llamar a β y γ morfismos de fusión.

Nótese que, si H es un cuasigrupo de Hopf débil, podemos expresar los Ω-morfismos como composiciones de los morfismos de fusión de la siguiente manera:

$$\Omega_L^1 = \overline{\beta} \circ \beta, \quad \Omega_R^1 = \beta \circ \overline{\beta}, \quad \Omega_L^2 = \gamma \circ \overline{\gamma}, \quad \Omega_R^2 = \overline{\gamma} \circ \gamma,$$

donde

$$\overline{\beta} = (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \lambda_H \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H)$$

y

$$\overline{\gamma} = (H \otimes \mu_H) \circ (H \otimes \lambda_H \otimes H) \circ (\delta_H \otimes H).$$

Nótese que, si H es un cuasigrupo de Hopf débil, podemos expresar los Ω-morfismos como composiciones de los morfismos de fusión de la siguiente manera:

$$\Omega_L^1 = \overline{\beta} \circ \beta, \quad \Omega_R^1 = \beta \circ \overline{\beta}, \quad \Omega_L^2 = \gamma \circ \overline{\gamma}, \quad \Omega_R^2 = \overline{\gamma} \circ \gamma,$$

donde

$$\overline{\beta} = (\mu_H \otimes H) \circ (H \otimes \lambda_H \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H)$$

y

$$\overline{\gamma} = (H \otimes \mu_H) \circ (H \otimes \lambda_H \otimes H) \circ (\delta_H \otimes H).$$

Además, si el cuasigrupo de Hopf débil H es un cuasigrupo de Hopf,

$$\Pi_H^L = \Pi_H^R = \overline{\Pi}_H^L = \overline{\Pi}_H^R = \varepsilon_H \otimes \eta_H$$

y entonces los Ω-morfismos son identidades. Como consecuencia, en este caso, tenemos que los morfismos de fusión β y γ son isomorfismos con inversos $\overline{\beta}$ y $\overline{\gamma}$, respectivamente.

Teorema

Sea H una biálgebra no asociativa débil. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) H es un cuasigrupo de Hopf débil.

(ii) Los morfismos

$$f = q_R^1 \circ \beta \circ j_L^1 : H \times_L^1 H \to H \times_R^1 H$$

y

$$g = q_L^2 \circ \gamma \circ j_R^2 : H \times_R^2 H \to H \times_L^2 H$$

son isomorfismos, el morfismo $j_L^1 \circ f^{-1} \circ q_R^1$ es H-cuasilineal por la izquierda y el morfismo $j_R^2 \circ g^{-1} \circ q_L^2$ es H-cuasilineal por la derecha.

Teorema

Sea H una biálgebra no asociativa débil. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) H es un cuasigrupo de Hopf débil.

(ii) Los morfismos

$$f = q_R^1 \circ \beta \circ j_L^1 : H \times_L^1 H \to H \times_R^1 H$$

y

$$g = q_L^2 \circ \gamma \circ j_R^2 : H \times_R^2 H \to H \times_L^2 H$$

son isomorfismos, el morfismo $j_L^1 \circ f^{-1} \circ q_R^1$ es H-cuasilineal por la izquierda y el morfismo $j_R^2 \circ g^{-1} \circ q_L^2$ es H-cuasilineal por la derecha.

Demostración

(ii)$\Rightarrow$ (i)

$$\lambda_H = (H \otimes \varepsilon_H) \circ j_L^1 \circ f^{-1} \circ q_R^1 \circ (\eta_H \otimes H)$$

Corolario

Sea H una biálgebra no asociativa. Entonces H es un cuasigrupo de Hopf si, y sólo si, los morfismos de fusión β y γ son isomorfismos con inversos H-cuasilineales por la izquierda y H-cuasilineales por la derecha, respectivamente.

Corolario

Sea H una biálgebra no asociativa. Entonces H es un cuasigrupo de Hopf si, y sólo si, los morfismos de fusión β y γ son isomorfismos con inversos H-cuasilineales por la izquierda y H-cuasilineales por la derecha, respectivamente.

- Este resultado (llamado Primer Teorema Fundamental) fue probado por T. Brzezinski para cuasigrupos de Hopf en $\mathbb{F}$-Vect en

  T. Brzeziński, Hopf modules and the fundamental theorem for Hopf quasigroups, Internat. Elec. J. Algebra 8 (2010), 114-128.

Corolario

Sea H una biágebra débil. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) H es un álgebra de Hopf débil.

(ii) El morfismo
$$f = q_R^1 \circ \beta \circ j_L^1 : H \times_L^1 H \to H \times_R^1 H$$
es un isomorfismo.

(ii) El morfismo
$$g = q_L^2 \circ \gamma \circ j_R^2 : H \times_R^2 H \to H \times_L^2 H$$
es un isomorfismo.

Corolario

Sea H una biágebra débil. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) H es un álgebra de Hopf débil.

(ii) El morfismo
$$f = q_R^1 \circ \beta \circ j_L^1 : H \times_L^1 H \to H \times_R^1 H$$
es un isomorfismo.

(ii) El morfismo
$$g = q_L^2 \circ \gamma \circ j_R^2 : H \times_R^2 H \to H \times_L^2 H$$
es un isomorfismo.

- Este resultado fue probado por P. Schauenburg para álgebras de Hopf débiles en $\mathbb{F}$-Vect en:

P. Schauenburg, Weak Hopf algebras and quantum groupoids, Noncommutative geometry and quantum groups (Warsaw, 2001), 171-188, Polish Acad. Sci., Warsaw, (2003).

Caracterización en $\mathbb{F}$-Vect

A lo largo de esta sección $\mathbb{F}$ será un cuerpo. Si no se especifica lo contrario, magmas, álgebras, coálgebras, cuasigrupos de Hopf débiles y morfismos se entenderá que pertenecen a la categoría $\mathbb{F}$-Vect.

A lo largo de esta sección $\mathbb{F}$ será un cuerpo. Si no se especifica lo contrario, magmas, álgebras, coálgebras, cuasigrupos de Hopf débiles y morfismos se entenderá que pertenecen a la categoría $\mathbb{F}$-Vect.

Si C es una coálgebra, usaremos la notación de Heyneman-Sweedler $\delta_C(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ donde se ha suprimido el símbolo de sumatorio. Teniendo en cuenta esto, C es una coálgebra si, para todo $c \in C$ se tiene que:

$$c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)},$$

$$\varepsilon_C(c_{(1)})c_{(2)} = c = c_{(1)}\varepsilon_C(c_{(2)}),$$

Nótese que en la segunda igualdad identificamos $\varepsilon_C(c_{(1)}) \otimes c_{(2)}$ con el elemento de C dado por $\varepsilon_C(c_{(1)})c_{(2)}$ usando la restricción de unidad por la izquierda $l_C : \mathbb{F} \otimes C \to C$ (similarmente, $c_{(1)} \otimes \varepsilon_C(c_{(2)})$ se identifica con $c_{(1)}\varepsilon_C(c_{(2)})$ usando la restricción de unidad por la derecha $r_C : C \otimes \mathbb{K} \to C$).

A lo largo de esta sección $\mathbb{F}$ será un cuerpo. Si no se especifica lo contrario, magmas, álgebras, coálgebras, cuasigrupos de Hopf débiles y morfismos se entenderá que pertenecen a la categoría $\mathbb{F}$-Vect.

Si C es una coálgebra, usaremos la notación de Heyneman-Sweedler $\delta_C(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ donde se ha suprimido el símbolo de sumatorio. Teniendo en cuenta esto, C es una coálgebra si, para todo $c \in C$ se tiene que:

$$c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)},$$

$$\varepsilon_C(c_{(1)})c_{(2)} = c = c_{(1)}\varepsilon_C(c_{(2)}),$$

Nótese que en la segunda igualdad identificamos $\varepsilon_C(c_{(1)}) \otimes c_{(2)}$ con el elemento de C dado por $\varepsilon_C(c_{(1)})c_{(2)}$ usando la restricción de unidad por la izquierda $l_C : \mathbb{F} \otimes C \to C$ (similarmente, $c_{(1)} \otimes \varepsilon_C(c_{(2)})$ se identifica con $c_{(1)}\varepsilon_C(c_{(2)})$ usando la restricción de unidad por la derecha $r_C : C \otimes \mathbb{K} \to C$).

Un morfismo de coálgebras $f : C \to D$ es una aplicación lineal tal que $\varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon_C(c)$ y

$$f(c)_{(1)} \otimes f(c)_{(2)} = f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)}).$$

Si A es un magma unitario y C es una coálgebra, para dos morfismos $f, g : C \to A$, se define el producto convolución de f y g, denotado por

$$f * g : C \to A,$$

como

$$(f * g)(c) = f(c_{(1)})g(c_{(2)}).$$

Si A es un magma unitario y C es una coálgebra, para dos morfismos $f, g : C \to A$, se define el producto convolución de f y g, denotado por

$$f * g : C \to A,$$

como

$$(f * g)(c) = f(c_{(1)})g(c_{(2)}).$$

Si S es un conjunto, con $\mathbb{F}[S]$ denotaremos el $\mathbb{F}$-espacio vectorial con base S, i.e.,

$$\mathbb{F}[S] = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{F}s.$$

Este espacio vectorial tiene una estructura de coálgebra dada por

$$\delta_{\mathbb{F}[S]}(s) = s \otimes s, \quad \varepsilon_{\mathbb{F}[S]}(s) = 1_{\mathbb{K}}.$$

La coálgebra $\mathbb{F}[S]$ se llamará la coálgebra de tipo grupo de S.

Definición

Sea C una coálgebra. Un elemento $c \in C$ se dirá que es de tipo grupo si:

$$\delta_C(s) = s \otimes s.$$

Definición

Sea C una coálgebra. Un elemento $c \in C$ se dirá que es de tipo grupo si:

$$\delta_C(s) = s \otimes s.$$

Si s es un elemento de tipo grupo

$$\varepsilon_C(s) = 1_{\mathbb{F}}.$$

Definición

Sea C una coálgebra. Un elemento $c \in C$ se dirá que es de tipo grupo si:

$$\delta_C(s) = s \otimes s.$$

Si s es un elemento de tipo grupo

$$\varepsilon_C(s) = 1_{\mathbb{F}}.$$

En lo que sigue denotaremos por

$$\mathrm{G}(C)$$

el conjunto de elementos de tipo grupo de C.

Definición

Sea C una coálgebra. Un elemento $c \in C$ se dirá que es de tipo grupo si:

$$\delta_C(s) = s \otimes s.$$

Si s es un elemento de tipo grupo

$$\varepsilon_C(s) = 1_{\mathbb{F}}.$$

En lo que sigue denotaremos por

$$\mathrm{G}(C)$$

el conjunto de elementos de tipo grupo de C.

Es bien conocido que $\mathrm{G}(C)$ es un conjunto linealmente independiente y, si S es un conjunto, $\mathrm{G}(\mathbb{F}[S]) = S$.

Definición

Diremos que una coálgebra es punteada si sus subcoálgebras simples son de dimensión uno.

Definición

Diremos que una coálgebra es punteada si sus subcoálgebras simples son de dimensión uno.

Teorema

Una coálgebra C es punteada si, y sólo si, su coradical C_0 (la suma de todas las subcoálgebras simples de C) es la coálgebra de tipo grupo de $\mathrm{G}(C)$, i.e., $C_0 = \mathbb{F}[\mathrm{G}(C)]$.

Definición

Diremos que una coálgebra es punteada si sus subcoálgebras simples son de dimensión uno.

Teorema

Una coálgebra C es punteada si, y sólo si, su coradical C_0 (la suma de todas las subcoálgebras simples de C) es la coálgebra de tipo grupo de $\mathrm{G}(C)$, i.e., $C_0 = \mathbb{F}[\mathrm{G}(C)]$.

Definición

Una coálgebra C se dice cosemisimple si $C = C_0$.

Definición

Diremos que una coálgebra es punteada si sus subcoálgebras simples son de dimensión uno.

Teorema

Una coálgebra C es punteada si, y sólo si, su coradical C_0 (la suma de todas las subcoálgebras simples de C) es la coálgebra de tipo grupo de $\mathrm{G}(C)$, i.e., $C_0 = \mathbb{F}[\mathrm{G}(C)]$.

Definición

Una coálgebra C se dice cosemisimple si $C = C_0$.

Teorema

Sea C una coálgebra. Entonces es punteada y cosemisimple si, y sólo si, $C = \mathbb{F}[\mathrm{G}(C)]$.

Definición

Un cuasigrupo de Hopf débil en $\mathbb{F}$-Vect es $\mathbb{K}$-espacio vectorial H tal que es un magma unitario con producto $\mu_H(h \otimes g) = hg$ y unidad 1 y una coálgebra con coproducto δ_H y counidad ε_H, satisfaciendo las siguientes propiedades para todos $h, k, l \in H$:

(1) $(hk)_{(1)} \otimes (hk)_{(2)} = h_{(1)}k_{(1)} \otimes h_{(2)}k_{(2)}$.

(2) $\varepsilon_H((hk)l) = \varepsilon_H(h(kl)) = \varepsilon_H(hk_{(1)})\varepsilon_H(k_{(2)}l) = \varepsilon_H(hk_{(2)})\varepsilon_H(k_{(1)}l)$.

(3) $1_{(1)} \otimes 1_{(2)} \otimes 1_{(3)} = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}1_{(1')} \otimes 1_{(2')} = 1_{(1)} \otimes 1_{(1')}1_{(2)} \otimes 1_{(2')}$.

(4) Existe una aplicación lineal $\lambda_H : H \to H$ (llamada antípoda de H) tal que, si $\Pi_H^L : H \to H$ es la aplicación $\mathbb{F}$-lineal definida por $\Pi_H^L = id_H * \lambda_H$ (morfismo codominio) y $\Pi_H^R : H \to H$ es la aplicación $\mathbb{F}$-lineal dada por $\Pi_H^R = \lambda_H * id_H$ (morfismo dominio), tenemos las siguientes igualdades:

- (4-1) $\Pi_H^L(h) = \varepsilon_H(1_{(1)}h)1_{(2)}$.
- (4-2) $\Pi_H^R(h) = \varepsilon_H(h1_{(2)})1_{(1)}$.
- (4-3) $\lambda_H = \lambda_H * \Pi_H^L = \Pi_H^R * \lambda_H$.
- (4-4) $\lambda_H(h_{(1)})(h_{(2)}k) = \Pi_H^R(h)k$.
- (4-5) $h_{(1)}(\lambda_H(h_{(2)})k) = \Pi_H^L(h)k$.
- (4-6) $(hk_{(1)})\lambda_H(k_{(2)}) = h\Pi_H^L(k)$.
- (4-7) $(h\lambda_H(k_{(1)}))k_{(2)} = h\Pi_H^R(k)$.

Dado un cuasigrupo de Hopf débil H, en lo que sigue denotaremos $Im(\Pi_H^L)$ como H_L y, de la misma forma, $Im(\Pi_H^R)$ como H_R. Como sabemos ambos objetos son álgebras donde

$$1_{H_L} = \Pi_H^L(1) = 1, \quad \mu_{H_L} = \Pi_H^L \circ \mu_H, \quad 1_{H_R} = \Pi_H^R(1) = 1, \quad \mu_{H_R} = \Pi_H^R \circ \mu_H.$$

Dado un cuasigrupo de Hopf débil H, en lo que sigue denotaremos $Im(\Pi_H^L)$ como H_L y, de la misma forma, $Im(\Pi_H^R)$ como H_R. Como sabemos ambos objetos son álgebras donde

$$1_{H_L} = \Pi_H^L(1) = 1, \quad \mu_{H_L} = \Pi_H^L \circ \mu_H, \quad 1_{H_R} = \Pi_H^R(1) = 1, \quad \mu_{H_R} = \Pi_H^R \circ \mu_H.$$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Las álgebras H_R y H_L son separables, finito dimensionales y semisimples.

Dado un cuasigrupo de Hopf débil H, en lo que sigue denotaremos $Im(\Pi_H^L)$ como H_L y, de la misma forma, $Im(\Pi_H^R)$ como H_R. Como sabemos ambos objetos son álgebras donde

$$1_{H_L} = \Pi_H^L(1) = 1, \quad \mu_{H_L} = \Pi_H^L \circ \mu_H, \quad 1_{H_R} = \Pi_H^R(1) = 1, \quad \mu_{H_R} = \Pi_H^R \circ \mu_H.$$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Las álgebras H_R y H_L son separables, finito dimensionales y semisimples.

Demostración

En este caso H_R es separable si, y sólo si, existe un elemento en $e \in H_R^e = H_R \otimes H_R^{op}$ tal que $\mu_{H_R}(e) = 1$ y $Je = 0$ donde J es el ideal de H_R^e generado por $h \otimes 1 - 1 \otimes h$. Tomamos:

$$e = \Pi_H^R(1_{(1)}) \otimes (\Pi_H^R \circ \lambda_H)(1_{(2)}).$$

Como H_R es separable en $\mathbb{F}$-Vect, resulta finito dimensional y semisimple.

Teorema

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y sea $\mathsf{L} = (\mathsf{L_0}, \mathsf{L_1})$ un cuasigrupoide finito. El magma del cuasigrupoide $\mathbb{F}[\mathsf{L}]$ definido por $\mathbb{F}[\mathsf{L}] = \mathbb{F}[\mathsf{L_1}]$ es un cuasigrupo de Hopf débil donde la unidad

$$1 = \sum_{x \in \mathsf{L_0}} id(x),$$

el producto

$$\mu_{\mathbb{F}[\mathsf{L}]}(\tau \otimes \sigma) = \begin{cases} \tau \bullet \sigma, & \text{si } (\tau, \sigma) \in \mathsf{L_1} \; {}_{s_\mathsf{L}}\!\times_{t_\mathsf{L}} \mathsf{L_1}, \\ 0, & \text{si } (\tau, \sigma) \notin \mathsf{L_1} \; {}_{s_\mathsf{L}}\!\times_{t_\mathsf{L}} \mathsf{L_1}, \end{cases}$$

la counidad $\varepsilon_{\mathbb{F}[\mathsf{L}]}(\sigma) = 1_{\mathbb{F}}$, el coproducto $\delta_{\mathbb{F}[\mathsf{L}]}(\sigma) = \sigma \otimes \sigma$ y el morfismo antípoda

$$\lambda_{\mathbb{F}[\mathsf{L}]}(\sigma) = \lambda(\sigma).$$

Es más,

$$Im(\Pi^L_{\mathbb{F}[\mathsf{L}]}) = Im(\Pi^R_{\mathbb{F}[\mathsf{L}]}) = < \{id(x) \;/\; x \in \mathsf{L_0}\} > .$$

Teorema

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y sea $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1) : L \to L'$ un morfismo de cuasigrupoides finitos. La aplicación lineal $\mathbb{F}[\Gamma] : \mathbb{F}[L] \to \mathbb{F}[L']$, dada por

$$\mathbb{F}[\Gamma](\sigma) = \Gamma_1(\sigma),$$

es un morfismo de cuasigrupos de Hopf que denotaremos por $\mathbb{F}[\Gamma]$.

Teorema

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y sea $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1) : L \to L'$ un morfismo de cuasigrupoides finitos. La aplicación lineal $\mathbb{F}[\Gamma] : \mathbb{F}[L] \to \mathbb{F}[L']$, dada por

$$\mathbb{F}[\Gamma](\sigma) = \Gamma_1(\sigma),$$

es un morfismo de cuasigrupos de Hopf que denotaremos por $\mathbb{F}[\Gamma]$.

Teorema

Existe un funtor

$$F : \overline{CGPD} \to CGHD$$

definido en objetos por $F(L) = \mathbb{F}[L]$ y en morfismos por $F\,(\Gamma) = \mathbb{F}[\Gamma]$.

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea $\mathrm{G}(H)$ el conjunto de elementos de tipo grupo de H como coálgebra.

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea $\mathrm{G}(H)$ el conjunto de elementos de tipo grupo de H como coálgebra.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea $t \in H$ tal que $\delta_H(t) = t \otimes t$. Se cumplen las siguientes igualdades:

(i) $\Pi_H^L(t)t = \overline{\Pi}_H^L(t)t = t\Pi_H^R(t) = t\overline{\Pi}_H^R(t) = t$.

(ii) Los elementos $\Pi_H^L(t)$, $\overline{\Pi}_H^L(t)$, $\Pi_H^R(t)$ y $\overline{\Pi}_H^R(t)$ son idempotentes.

(iii) $\delta_H(\Pi_H^L(t)) = \Pi_H^L(t) \otimes \Pi_H^L(t), \quad \delta_H(\Pi_H^R(t)) = \Pi_H^R(t) \otimes \Pi_H^R(t)$.

(iv) $(\Pi_H^L \circ \Pi_H^R)(t) = \Pi_H^R(t), \quad (\Pi_H^R \circ \Pi_H^L)(t) = \Pi_H^L(t)$.

(v) $\Pi_H^L(t) = \overline{\Pi}_H^L(t), \quad \Pi_H^R(t) = \overline{\Pi}_H^R(t)$.

(vi) $\delta_H(\overline{\Pi}_H^L(t)) = \overline{\Pi}_H^L(t) \otimes \overline{\Pi}_H^L(t), \quad \delta_H(\overline{\Pi}_H^R(t)) = \overline{\Pi}_H^R(t) \otimes \overline{\Pi}_H^R(t)$.

(vii) $(\Pi_H^L \circ \lambda_H)(t) = \Pi_H^R(t) = (\lambda_H \circ \Pi_H^R)(t), \; (\Pi_H^R \circ \lambda_H)(t) = \Pi_H^L(t) = (\lambda_H \circ \Pi_H^L)(t)$.

(viii) $(\lambda_H^2 \circ \Pi_H^L)(t) = \Pi_H^L(t) = (\Pi_H^L \circ \lambda_H^2)(t), \; (\lambda_H^2 \circ \Pi_H^R)(t) = \Pi_H^R(t) = (\Pi_H^R \circ \lambda_H^2)(t)$.

(ix) $\lambda_H^2(t) = t$.

Corolario

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Si $g \in H$ es un elemento de tipo grupo de H, también lo son $\Pi_H^L(g)$, $\Pi_H^R(g)$ y $\lambda_H(g)$.

Corolario

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Si $\mathrm{g} \in H$ es un elemento de tipo grupo de H, también lo son $\Pi_H^L(\mathrm{g})$, $\Pi_H^R(\mathrm{g})$ y $\lambda_H(\mathrm{g})$.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. La cardinalidad de

$$\mathrm{G}(H) \cap H_R$$

es finita.

Corolario

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Si $g \in H$ es un elemento de tipo grupo de H, también lo son $\Pi_H^L(g)$, $\Pi_H^R(g)$ y $\lambda_H(g)$.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. La cardinalidad de

$$G(H) \cap H_R$$

es finita.

Demostración

Sabemos que los elementos de tipo grupo forman un sistema libre y además H_R es finito dimensional. Por lo tanto, la cardinalidad de $G(H) \cap H_R$ es finita.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. El par ordenado de conjuntos

$$\mathcal{T}(H) = (\mathcal{T}(H)_0, \mathcal{T}(H)_1),$$

con

$$\mathcal{T}(H)_0 = \mathrm{G}(H) \cap H_R, \quad \mathcal{T}(H)_1 = \mathrm{G}(H),$$

es un cuasigrupoide finito donde las aplicaciones domino, codominio e identidad

$$\mathfrak{s} : \mathcal{T}(H)_1 \to \mathcal{T}(H)_0, \quad \mathfrak{t} : \mathcal{T}(H)_1 \to \mathcal{T}(H)_0, \quad \mathfrak{id} : \mathcal{T}(H)_0 \to \mathcal{T}(H)_1,$$

están dadas por

$$\mathfrak{s}(\mathrm{g}) = \Pi_H^R(\mathrm{g}), \quad \mathfrak{t}(\mathrm{g}) = \Pi_H^L(\mathrm{g}), \quad \mathfrak{id}(\mathrm{r}) = \mathrm{r},$$

el producto

$$\star : \mathcal{T}(H)_1 \ {}_{\mathfrak{s}}\times_{\mathfrak{t}} \mathcal{T}(H)_1 \to \mathcal{T}(H)_1$$

está definido por $\mathrm{h} \star \mathrm{g} = \mu_H(\mathrm{h} \otimes \mathrm{g})$, y la aplicación de inversión $\lambda : \mathcal{T}(H)_1 \to \mathcal{T}(H)_1$ es

$$\lambda(\mathrm{g}) = \lambda_H(\mathrm{g}).$$

Theorem

Sea $f : H \to H'$ un morfismo de cuasigrupos de Hopf débiles. El par

$$\mathcal{T}(f) = (\mathcal{T}(f)_0, \mathcal{T}(f)_1),$$

donde

$$\mathcal{T}(f)_0 : \mathcal{T}(H)_0 \to \mathcal{T}(H')_0, \quad \mathcal{T}(f)_1 : \mathcal{T}(H)_1 \to \mathcal{T}(H')_1$$

son las aplicaciones dadas por $\mathcal{T}(f)_0(\mathrm{r}) = f(\mathrm{r})$ y $\mathcal{T}(f)_1(\mathrm{g}) = f(\mathrm{g})$, es un morfismo de cuasigrupoides entre $\mathcal{T}(H)$ y $\mathcal{T}(H')$.

Theorem

Sea $f : H \to H'$ un morfismo de cuasigrupos de Hopf débiles. El par

$$\mathcal{T}(f) = (\mathcal{T}(f)_0, \mathcal{T}(f)_1),$$

donde

$$\mathcal{T}(f)_0 : \mathcal{T}(H)_0 \to \mathcal{T}(H')_0, \quad \mathcal{T}(f)_1 : \mathcal{T}(H)_1 \to \mathcal{T}(H')_1$$

son las aplicaciones dadas por $\mathcal{T}(f)_0(\mathrm{r}) = f(\mathrm{r})$ y $\mathcal{T}(f)_1(\mathrm{g}) = f(\mathrm{g})$, es un morfismo de cuasigrupoides entre $\mathcal{T}(H)$ y $\mathcal{T}(H')$.

Teorema

Existe un funtor

$$\mathrm{L} : \mathrm{CGHD} \to \overline{\mathrm{CGPD}}$$

definido en objetos por $\mathrm{L}(H) = \mathcal{T}(H)$ y en morfismos por $\mathrm{L}(f) = \mathcal{T}(f)$.

Teorema

El funtor F es adjunto por la izquierda del funtor L.

Teorema

Los funtores F y L inducen una equivalencia entre $\overline{\text{CGPD}}$ y la subcategoría plena de CGHD cuyos objetos son los cuasigrupos the Hopf débiles punteados y cosemisimples sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.

Teorema

Los funtores F y L inducen una equivalencia entre $\overline{\text{CGPD}}$ y la subcategoría plena de CGHD cuyos objetos son los cuasigrupos the Hopf débiles punteados y cosemisimples sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.

Corolario

Si $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado, los funtores F y L inducen una equivalencia entre $\overline{\text{CGPD}}$ y la subcategoría plena de CGHD cuyos objetos son los cuasigrupos de Hopf débiles coconmutativos y cosemisimples.

Teorema

Los funtores F y L inducen una equivalencia entre $\overline{\text{CGPD}}$ y la subcategoría plena de CGHD cuyos objetos son los cuasigrupos the Hopf débiles punteados y cosemisimples sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.

Corolario

Si $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado, los funtores F y L inducen una equivalencia entre $\overline{\text{CGPD}}$ y la subcategoría plena de CGHD cuyos objetos son los cuasigrupos de Hopf débiles coconmutativos y cosemisimples.

- En el contexto asociativo (grupoides finitos), los resultados previos son justamente los obtenidos en

  G. Böhm, J. Gómez-Torrecillas, E. López Centella, On the category of weak bialgebras, J. Algebra 399 (2014), 801-844.

  para álgebras de Hopf débiles.

Teorema

La categoría de lazos con inversos es equivalente a la de cuasigrupos de Hopf punteados cosemisimples sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.

Teorema

La categoría de lazos con inversos es equivalente a la de cuasigrupos de Hopf punteados cosemisimples sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.

Corolario

Si $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado, la categoría de lazos con inversos es equivalente a la subcategoría plena de la categoría de cuasigrupos de Hopf cuyos objetos son los cuasigrupos de Hopf coconmutativos y cosemisimples.

Teorema

La categoría de lazos con inversos es equivalente a la de cuasigrupos de Hopf punteados cosemisimples sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.

Corolario

Si $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado, la categoría de lazos con inversos es equivalente a la subcategoría plena de la categoría de cuasigrupos de Hopf cuyos objetos son los cuasigrupos de Hopf coconmutativos y cosemisimples.

Teorema

La categoría de grupos es equivalente a la de álgebras de de Hopf punteadas cosemisimples sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.

Teorema

La categoría de lazos con inversos es equivalente a la de cuasigrupos de Hopf punteados cosemisimples sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.

Corolario

Si $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado, la categoría de lazos con inversos es equivalente a la subcategoría plena de la categoría de cuasigrupos de Hopf cuyos objetos son los cuasigrupos de Hopf coconmutativos y cosemisimples.

Teorema

La categoría de grupos es equivalente a la de álgebras de de Hopf punteadas cosemisimples sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.

Corolario

Si $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado, la categoría de grupos es equivalente a la subcategoría plena de la categoría de álgebras de Hopf cuyos objetos son las álgebras de Hopf coconmutativas y cosemisimples.

Referencias.

- J.N. Alonso Álvarez, J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez: Weak Hopf quasigroups, Asian J. Math. 20, No. 4 (2016), 665-694.
- J.N. Alonso Álvarez, J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez: A characterization of weak Hopf (co)quasigroups, Mediterranean J. Math. 13, No. 5 (2016), 3747-3764.
- J.N. Alonso Álvarez, J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez: Quasigroupoids and weak Hopf quasigroups, J. Algebra 568 (2021), 408-436.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles