Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

Ramón González Rodríguez

CENTRO DE INVESTIGACIÓN E TECNOLOXÍA MATEMÁTICA DE GALICIA

Universidade de Vigo

Escuela de la Red de Álgebra no Conmutativa (Nc-Alg)

PARTE 4: Módulos de Hopf

Almería, 8-12 de julio de 2024

GOBIERNO DE ESPAÑA MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN

Ministerio de Ciencia e Innovación. Agencia Estatal de Investigación
Unión Europea – Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER)
RED2022-134631-T

Índice

1. Módulos de Hopf en diferentes contextos
2. Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles (versión débil)
3. Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles (versión fuerte)
4. Módulos Doi-Hopf: Motivación
5. Módulos Doi-Hopf para cuasigrupos de Hopf débiles

Módulos de Hopf en diferentes contextos

1. Módulos de Hopf en diferentes contextos
2. Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles (versión débil)
3. Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles (versión fuerte)
4. Módulos Doi-Hopf: Motivación
5. Módulos Doi-Hopf para cuasigrupos de Hopf débiles

En esta parte asumiremos que C es una categoría monoidal trenzada estricta con producto tensor $\otimes$, objeto unidad K y trenza c. También supondremos que la categoría tiene coigualadores y, por lo tanto, en C todo morfismo idempotente rompe.

Definición

Sea A un álgebra en C y M un objeto de la misma categoría. Diremos que M es un A-módulo por la derecha si existe un morfismo

$$\phi_M : M \otimes A \to M$$

tal que:

$$\phi_M \circ (M \otimes \eta_A) = id_M, \quad \phi_M \circ (M \otimes \phi_M) = \phi_M \circ (M \otimes \mu_A).$$

Un morfismo $f : M \to N$ en C entre A-módulos por la derecha es un morfismo de A-módulos por la derecha si

$$f \circ \phi_M = \phi_N \circ (f \otimes A).$$

Definición

Sea A un álgebra en C y M un objeto de la misma categoría. Diremos que M es un A-módulo por la derecha si existe un morfismo

$$\phi_M : M \otimes A \to M$$

tal que:

$$\phi_M \circ (M \otimes \eta_A) = id_M, \quad \phi_M \circ (M \otimes \phi_M) = \phi_M \circ (M \otimes \mu_A).$$

Un morfismo $f : M \to N$ en C entre A-módulos por la derecha es un morfismo de A-módulos por la derecha si

$$f \circ \phi_M = \phi_N \circ (f \otimes A).$$

Con

$$\mathrm{Mod}_A$$

denotaremos la categoría de módulos por la derecha sobre A.

Definición

Sea C una coálgebra en C y M un objeto de la misma categoría. Diremos que M es un C-comódulo por la derecha si existe un morfismo

$$\rho_M : M \to M \otimes C$$

tal que:

$$(M \otimes \varepsilon_C) \circ \rho_M = id_M, \quad (\rho_M \otimes C) \circ \rho_M = (M \otimes \delta_C) \circ \rho_M.$$

Un morfismo $f : M \to N$ en C entre C-comódulos por la derecha es un morfismo de C-comódulos por la derecha si

$$(f \otimes C) \circ \rho_M = \rho_N \circ f.$$

Definición

Sea C una coálgebra en C y M un objeto de la misma categoría. Diremos que M es un C-comódulo por la derecha si existe un morfismo

$$\rho_M : M \to M \otimes C$$

tal que:

$$(M \otimes \varepsilon_C) \circ \rho_M = id_M, \quad (\rho_M \otimes C) \circ \rho_M = (M \otimes \delta_C) \circ \rho_M.$$

Un morfismo $f : M \to N$ en C entre C-comódulos por la derecha es un morfismo de C-comódulos por la derecha si

$$(f \otimes C) \circ \rho_M = \rho_N \circ f.$$

Con

$$\text{coMod}_C$$

denotaremos la categoría de comódulos por la derecha sobre C.

Definición

Supongamos que H es un álgebra de Hopf. Sea M un H-módulo y H-comódulo por la derecha con acción $\phi_M : M \otimes H \to M$ y coacción $\rho_M : M \to M \otimes H$. Diremos que (M, ϕ_M, ρ_M) es un H-módulo de Hopf por la derecha cuando

$$\rho_M \circ \phi_M = (\phi_M \otimes \mu_H) \circ (M \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\rho_M \otimes \delta_H).$$

Un morfismo de módulos de Hopf es un morfismo de H-módulos y H-comódulos por la derecha y la categoría que forman será denotada por

$$\mathrm{HM}_H^H.$$

Dado (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf por la derecha, el subobjeto de coinvariantes, denotado por M^{coH}, se define como la imagen del morfismo idempotente

$$q_M = \phi_M \circ (M \otimes \lambda_H) \circ \rho_M : M \to M$$

y resulta ser el igualador de los morfismos ρ_M y $M \otimes \eta_H$,

$$M^{coH} \xrightarrow{i_M} M \underset{M \otimes \eta_H}{\overset{\rho_M}{\rightrightarrows}} M \otimes H$$

La construcción del subobjeto de coinvariantes da lugar a un funtor

$$\mathrm{G} : \mathrm{HM}_H^H \to \mathrm{C}$$

llamado funtor de coinvariantes.

Si N es un objeto de C, entonces $N \otimes H$ con la acción y la coacción inducidas por el producto y el coproducto

$$\phi_{N\otimes H} = N \otimes \mu_H, \;\; \rho_{N\otimes H} = N \otimes \delta_H$$

es un H-módulo de Hopf por la derecha. Esta construcción también es funtorial y, por lo tanto, tenemos un funtor, llamado funtor de inducción,

$$\mathrm{F} : \mathrm{C} \to \mathrm{HM}_H^H.$$

Si N es un objeto de C, entonces $N \otimes H$ con la acción y la coacción inducidas por el producto y el coproducto

$$\phi_{N\otimes H} = N \otimes \mu_H, \quad \rho_{N\otimes H} = N \otimes \delta_H$$

es un H-módulo de Hopf por la derecha. Esta construcción también es funtorial y, por lo tanto, tenemos un funtor, llamado funtor de inducción,

$$\mathsf{F} : \mathsf{C} \to \mathsf{HM}_H^H.$$

Teorema

Para toda álgebra de Hopf H el funtor de inducción F es adjunto por la izquierda del funtor de coinvariantes G. La unidad de la adjunción está dada por

$$u_N : N \to (N \otimes H)^{coH},$$

donde u_N es el único morfismo tal que $i_{N\otimes H} \circ u_N = N \otimes \eta_H$ y la counidad por

$$v_M : M^{coH} \otimes H \to M, \quad v_M = \phi_M \circ (i_M \otimes H).$$

Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf

Si H es un álgebra de Hopf y (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf por la derecha,

$$v_M = M^{coH} \otimes H \to M$$

es un isomorfismo en HM_H^H.

Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf

Si H es un álgebra de Hopf y (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf por la derecha,

$$v_M = M^{coH} \otimes H \to M$$

es un isomorfismo en HM_H^H.

> **R.G. Larson, M.E. Sweedler**, An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras, Am. J. Math. 91 (1969), 75-93. ($\mathrm{C} = \mathbb{F}$-Vect)

Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf

Si H es un álgebra de Hopf y (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf por la derecha,

$$v_M = M^{coH} \otimes H \to M$$

es un isomorfismo en HM_H^H.

> **R.G. Larson, M.E. Sweedler**, An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras, Am. J. Math. 91 (1969), 75-93. ($\mathrm{C} = \mathbb{F}$-Vect)

Teorema

Si H es un álgebra de Hopf, el par adjunto (F, G) es una equivalencia de categorías.

Para un álgebra de Hopf débil H los módulos de Hopf se definen de la misma forma que para un álgebra de Hopf.

Para un álgebra de Hopf débil H los módulos de Hopf se definen de la misma forma que para un álgebra de Hopf.

Dado $(N, \psi_N) \in \mathrm{Mod}_{H_L}$ con n_N denotaremos el morfismo coigualador de $\psi_N \otimes H$ y $N \otimes \varphi_H$ donde

$$\varphi_H = \mu_H \circ (i_L \otimes H).$$

$$N \otimes H_L \otimes H \underset{N \otimes \varphi_H}{\overset{\psi_N \otimes H}{\rightrightarrows}} N \otimes H \xrightarrow{n_N} N \otimes_{H_L} H$$

Para todo $(N, \psi_N) \in \mathrm{Mod}_{H_L}$ se tiene que

$$(n_N \otimes H) \circ (\psi_N \otimes \delta_H) = (n_N \otimes H) \circ (N \otimes (\delta_H \circ \varphi_H))$$

y, como consecuencia, existe un único morfismo

$$\rho_{N \otimes_{H_L} H} : N \otimes_{H_L} H \to (N \otimes_{H_L} H) \otimes H$$

tal que

$$\rho_{N \otimes_{H_L} H} \circ n_N = (n_N \otimes H) \circ (N \otimes \delta_H).$$

El objeto

$$(N \otimes_{H_L} H, \rho_{N \otimes_{H_L} H})$$

es un H-comódulo por la derecha.

Por otro lado, supongamos que $-\otimes H$ conserva coigualadores, entonces ya que

$$n_N \circ (\psi_N \otimes \mu_H) = n_N \circ (N \otimes (\mu_H \circ (\varphi_H \otimes H)))$$

podemos asegurar que existe un único morfismo

$$\phi_{N\otimes_{H_L} H} : (N \otimes_{H_L} H) \otimes H \to N \otimes_{H_L} H$$

tal que

$$\phi_{N\otimes_{H_L} H} \circ (n_N \otimes H) = n_N \circ (N \otimes \mu_H)$$

y

$$(N \otimes_{H_L} \otimes H, \phi_{N\otimes_{H_L} H})$$

es un H-módulo por la derecha.

Por otro lado, supongamos que $-\otimes H$ conserva coigualadores, entonces ya que

$$n_N \circ (\psi_N \otimes \mu_H) = n_N \circ (N \otimes (\mu_H \circ (\varphi_H \otimes H)))$$

podemos asegurar que existe un único morfismo

$$\phi_{N \otimes_{H_L} H} : (N \otimes_{H_L} H) \otimes H \to N \otimes_{H_L} H$$

tal que

$$\phi_{N \otimes_{H_L} H} \circ (n_N \otimes H) = n_N \circ (N \otimes \mu_H)$$

y

$$(N \otimes_{H_L} \otimes H, \phi_{N \otimes_{H_L} H})$$

es un H-módulo por la derecha.

Se tiene que $(N \otimes_{H_L} \otimes H, \phi_{N \otimes_{H_L} \otimes H}, \phi_{N \otimes_{H_L} \otimes H})$ es un H-módulo de Hopf por la derecha y esta construcción es funtorial. Al igual que en el caso de las álgebras de Hopf tenemos un funtor, llamado funtor de inducción,

$$\mathrm{F} : \mathrm{Mod}_{H_L} \to \mathrm{HM}_H^H.$$

Dado (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf por la derecha, el subobjeto de coinvariantes, denotado por M^{coH}, se define como la imagen del morfismo idempotente

$$q_M = \phi_M \circ (M \otimes \lambda_H) \circ \rho_M : M \to M$$

y es el igualador de los morfismos ρ_M y $(M \otimes \Pi_H^L) \circ \rho_M$,

$$M^{coH} \xrightarrow{i_M} M \underset{(M \otimes \Pi_H^L) \circ \rho_M}{\overset{\rho_M}{\rightrightarrows}} M \otimes H$$

La construcción del subobjeto de coinvariantes es funtorial y tenemos un funtor, llamado funtor de coinvariantes,

$$\mathrm{G} : \mathrm{HM}_H^H \to \mathrm{Mod}_{H_L}.$$

Teorema

Para toda álgebra de Hopf débil H tal que $-\otimes H$ conserva coigualadores, el funtor de inducción F es adjunto por la izquierda del funtor de coinvariantes G. La unidad de la adjunción está dada por

$$u_N : N \to (N \otimes_{H_L} H)^{coH},$$

donde u_N es el único morfismo tal que $i_{N\otimes_{H_L} H} \circ u_N = n_N \circ (N \otimes \eta_H)$ y la counidad por $v_M : M^{coH} \otimes_{H_L} H \to M$ donde v_M es el único morfismo tal que

$$v_M \circ n_{M^{coH}} = \phi_M \circ (i_M \otimes H).$$

Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf

Si H es un álgebra de Hopf débil tal que $-\otimes H$ conserva coigualadores y (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf por la derecha, el morfismo

$$v_M = M^{coH} \otimes_{H_L} H \to M$$

es un isomorfismo en HM_H^H.

Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf

Si H es un álgebra de Hopf débil tal que $-\otimes H$ conserva coigualadores y (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf por la derecha, el morfismo

$$v_M = M^{coH} \otimes_{H_L} H \to M$$

es un isomorfismo en HM_H^H.

> **G. Bhöm. F. Nill, K. Szlachányi**, Weak Hopf algebras, I. Integral theory and C*-structure, J. Algebra 221 (1999), 385-438. ($\mathrm{C} = \mathbb{F}$-Vect)

Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf

Si H es un álgebra de Hopf débil tal que $-\otimes H$ conserva coigualadores y (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf por la derecha, el morfismo

$$v_M = M^{coH} \otimes_{H_L} H \to M$$

es un isomorfismo en HM_H^H.

G. Bhöm. F. Nill, K. Szlachányi, Weak Hopf algebras, I. Integral theory and C^*-structure, J. Algebra 221 (1999), 385-438. ($\mathrm{C} = \mathbb{F}$-Vect)

Teorema

Si H es un álgebra de Hopf débil tal que $-\otimes H$ conserva coigualadores, el par adjunto (F, G) es una equivalencia de categorías.

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf. Diremos que (M, ϕ_M, ρ_M) es un H-módulo de Hopf por la derecha si:

- (M, ρ_M) es un H-comódulo por la derecha.
- $\phi_M \circ (M \otimes \eta_H) = id_M$.
- $\phi_M \circ (\phi_M \otimes H) \circ (M \otimes \lambda_H \otimes H) \circ (M \otimes \delta_H) = M \otimes \varepsilon_H = \phi_M \circ (\phi_M \otimes \lambda_H) \circ (M \otimes \delta_H)$.
- $\rho_M \circ \phi_M = (\phi_M \otimes \mu_H) \circ (M \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\rho_M \otimes \delta_H)$

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf. Diremos que (M, ϕ_M, ρ_M) es un H-módulo de Hopf por la derecha si:

- (M, ρ_M) es un H-comódulo por la derecha.
- $\phi_M \circ (M \otimes \eta_H) = id_M$.
- $\phi_M \circ (\phi_M \otimes H) \circ (M \otimes \lambda_H \otimes H) \circ (M \otimes \delta_H) = M \otimes \varepsilon_H = \phi_M \circ (\phi_M \otimes \lambda_H) \circ (M \otimes \delta_H)$.
- $\rho_M \circ \phi_M = (\phi_M \otimes \mu_H) \circ (M \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\rho_M \otimes \delta_H)$

Dado (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf por la derecha, el subobjeto de coinvariantes, denotado por M^{coH}, se define como la imagen del morfismo idempotente

$$q_M = \phi_M \circ (M \otimes \lambda_H) \circ \rho_M : M \to M$$

y resulta ser el igualador de los morfismos ρ_M y $M \otimes \eta_H$,

$$M^{coH} \xrightarrow{i_M} M \underset{M \otimes \eta_H}{\overset{\rho_M}{\rightrightarrows}} M \otimes H$$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf. Si (M, ϕ_M, ρ_M) es un H-módulo de Hopf y para $M^{coH} \otimes H$ definimos

$$\phi_{M^{coH} \otimes H} = M^{coH} \otimes \mu_H, \quad \rho_{M^{coH} \otimes H} = M^{coH} \otimes \delta_H$$

se tiene que $(M^{coH} \otimes H, \phi_{M^{coH} \otimes H}, \rho_{M^{coH} \otimes H})$ es un H-módulo de Hopf por la derecha y

$$v_M : M^{coH} \otimes H \to M, \quad v_M = \phi_M \circ (i_M \otimes H))$$

es un isomorfismo de H-comódulos por la derecha.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf. Si (M, ϕ_M, ρ_M) es un H-módulo de Hopf y para $M^{coH} \otimes H$ definimos

$$\phi_{M^{coH} \otimes H} = M^{coH} \otimes \mu_H, \quad \rho_{M^{coH} \otimes H} = M^{coH} \otimes \delta_H$$

se tiene que $(M^{coH} \otimes H, \phi_{M^{coH} \otimes H}, \rho_{M^{coH} \otimes H})$ es un H-módulo de Hopf por la derecha y

$$v_M : M^{coH} \otimes H \to M, \quad v_M = \phi_M \circ (i_M \otimes H))$$

es un isomorfismo de H-comódulos por la derecha.

En las condiciones del resultado anterior, definiendo

$$\phi_M^{v_M} = v_M \circ \phi_{M^{coH} \otimes H} \circ (v_M^{-1} \otimes H) : M \otimes H \to M$$

se tiene que

$$\phi_M^{v_M} = \phi_M \circ (q_M \otimes \mu_H) \circ (\rho_M \otimes H)$$

y $(M, \phi_M^{v_M}, \rho_M)$ es un H-módulo de Hopf por la derecha que tiene asociado el mismo idempotente q_M y, por lo tanto, el mismo objeto de coinvariantes M^{coH}.

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf. La categoría de H-módulos de Hopf por la derecha se define como aquella cuyos objetos son los H-módulos de Hopf por la derecha y los morfismos $f : (M, \phi_M, \rho_M) \to (P, \phi_P, \rho_P)$ son morfismos $f : M \to P$ en C de H-comódulos y tales que son cuasilineales, esto es,

$$f \circ \phi_M^{v_M} = \phi_P^{v_P} \circ (f \otimes H).$$

La categoría la denotaremos como es habitual por HM_H^H.

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf. La categoría de H-módulos de Hopf por la derecha se define como aquella cuyos objetos son los H-módulos de Hopf por la derecha y los morfismos $f : (M, \phi_M, \rho_M) \to (P, \phi_P, \rho_P)$ son morfismos $f : M \to P$ en C de H-comódulos y tales que son cuasilineales, esto es,

$$f \circ \phi_M^{\nu_M} = \phi_P^{\nu_P} \circ (f \otimes H).$$

La categoría la denotaremos como es habitual por HM_H^H.

Al igual que para un álgebra de Hopf, tenemos un funtor de coinvariantes

$$\mathrm{G} : \mathrm{HM}_H^H \to \mathrm{C},$$

y un funtor de inducción,

$$\mathrm{F} : \mathrm{C} \to \mathrm{HM}_H^H.$$

Teorema

Para todo cuasigrupo de Hopf H el funtor de inducción F es adjunto por la izquierda del funtor de coinvariantes G. La unidad de la adjunción está dada por

$$u_N : N \to (N \otimes H)^{coH},$$

donde u_N es el único morfismo tal que $i_{N\otimes H} \circ u_N = N \otimes \eta_H$ y la counidad por

$$v_M : M^{coH} \otimes H \to M, \;\; v_M = \phi_M \circ (i_M \otimes H).$$

Teorema

Para todo cuasigrupo de Hopf H el funtor de inducción F es adjunto por la izquierda del funtor de coinvariantes G. La unidad de la adjunción está dada por

$$u_N : N \to (N \otimes H)^{coH},$$

donde u_N es el único morfismo tal que $i_{N\otimes H} \circ u_N = N \otimes \eta_H$ y la counidad por

$$v_M : M^{coH} \otimes H \to M, \;\; v_M = \phi_M \circ (i_M \otimes H).$$

Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf

Si H es un cuasigrupo de Hopf y (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf por la derecha, $v_M = M^{coH} \otimes H \to M$ es un isomorfismo en HM_H^H.

Teorema

Para todo cuasigrupo de Hopf H el funtor de inducción F es adjunto por la izquierda del funtor de coinvariantes G. La unidad de la adjunción está dada por

$$u_N : N \to (N \otimes H)^{coH},$$

donde u_N es el único morfismo tal que $i_{N\otimes H} \circ u_N = N \otimes \eta_H$ y la counidad por

$$v_M : M^{coH} \otimes H \to M, \;\; v_M = \phi_M \circ (i_M \otimes H).$$

Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf

Si H es un cuasigrupo de Hopf y (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf por la derecha, $v_M = M^{coH} \otimes H \to M$ es un isomorfismo en HM_H^H.

> **T. Brzeziński**, Hopf modules and the fundamental theorem for Hopf (co)quasigroups, Int. Electron. J. Algebra 8 (2010), 114-128. ($\text{C} = \mathbb{F}$-Vect)

Teorema

Para todo cuasigrupo de Hopf H el funtor de inducción F es adjunto por la izquierda del funtor de coinvariantes G. La unidad de la adjunción está dada por

$$u_N : N \to (N \otimes H)^{coH},$$

donde u_N es el único morfismo tal que $i_{N\otimes H} \circ u_N = N \otimes \eta_H$ y la counidad por

$$v_M : M^{coH} \otimes H \to M, \;\; v_M = \phi_M \circ (i_M \otimes H).$$

Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf

Si H es un cuasigrupo de Hopf y (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf por la derecha, $v_M = M^{coH} \otimes H \to M$ es un isomorfismo en HM_H^H.

T. Brzeziński, Hopf modules and the fundamental theorem for Hopf (co)quasigroups, Int. Electron. J. Algebra 8 (2010), 114-128. ($\mathrm{C} = \mathbb{F}$-Vect)

Teorema.

Si H es un cuasigrupo de Hopf, el par adjunto (F, G) es una equivalencia de categorías.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles (versión débil)

1. Módulos de Hopf en diferentes contextos
2. Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles (versión débil)
3. Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles (versión fuerte)
4. Módulos Doi-Hopf: Motivación
5. Módulos Doi-Hopf para cuasigrupos de Hopf débiles

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y M un objeto de C. Diremos que (M, ϕ_M, ρ_M) es un H-módulo de Hopf por la derecha si:

- El par (M, ρ_M) es un H-comódulo por la derecha.

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y M un objeto de C. Diremos que (M, ϕ_M, ρ_M) es un H-módulo de Hopf por la derecha si:

- El par (M, ρ_M) es un H-comódulo por la derecha.
- El morfismo $\phi_M : M \otimes H \to M$ cumple lo siguiente:
  - $\phi_M \circ (M \otimes \eta_H) = id_M$.
  - $\phi_M \circ (\phi_M \otimes \lambda_H) \circ (M \otimes \delta_H) = \phi_M \circ (M \otimes \Pi_H^L)$.
  - $\phi_M \circ (\phi_M \otimes H) \circ (M \otimes \lambda_H \otimes H) \circ (M \otimes \delta_H) = \phi_M \circ (M \otimes \Pi_H^R)$.
  - $\phi_M \circ (\phi_M \otimes H) \circ (M \otimes \Pi_H^L \otimes H) \circ (M \otimes \delta_H) = \phi_M$.
  - $\rho_M \circ \phi_M = (\phi_M \otimes \mu_H) \circ (M \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\rho_M \otimes \delta_H)$.

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y M un objeto de C. Diremos que (M, ϕ_M, ρ_M) es un H-módulo de Hopf por la derecha si:

- El par (M, ρ_M) es un H-comódulo por la derecha.
- El morfismo $\phi_M : M \otimes H \to M$ cumple lo siguiente:
  - $\phi_M \circ (M \otimes \eta_H) = id_M$.
  - $\phi_M \circ (\phi_M \otimes \lambda_H) \circ (M \otimes \delta_H) = \phi_M \circ (M \otimes \Pi_H^L)$.
  - $\phi_M \circ (\phi_M \otimes H) \circ (M \otimes \lambda_H \otimes H) \circ (M \otimes \delta_H) = \phi_M \circ (M \otimes \Pi_H^R)$.
  - $\phi_M \circ (\phi_M \otimes H) \circ (M \otimes \Pi_H^L \otimes H) \circ (M \otimes \delta_H) = \phi_M$.
  - $\rho_M \circ \phi_M = (\phi_M \otimes \mu_H) \circ (M \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\rho_M \otimes \delta_H)$.

Ejemplo

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil (H, μ_H, δ_H) es un H-módulo de Hopf por la derecha.

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y M un objeto de C. Diremos que (M, ϕ_M, ρ_M) es un H-módulo de Hopf por la derecha si:

- El par (M, ρ_M) es un H-comódulo por la derecha.
- El morfismo $\phi_M : M \otimes H \to M$ cumple lo siguiente:
  - $\phi_M \circ (M \otimes \eta_H) = id_M$.
  - $\phi_M \circ (\phi_M \otimes \lambda_H) \circ (M \otimes \delta_H) = \phi_M \circ (M \otimes \Pi_H^L)$.
  - $\phi_M \circ (\phi_M \otimes H) \circ (M \otimes \lambda_H \otimes H) \circ (M \otimes \delta_H) = \phi_M \circ (M \otimes \Pi_H^R)$.
  - $\phi_M \circ (\phi_M \otimes H) \circ (M \otimes \Pi_H^L \otimes H) \circ (M \otimes \delta_H) = \phi_M$.
  - $\rho_M \circ \phi_M = (\phi_M \otimes \mu_H) \circ (M \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\rho_M \otimes \delta_H)$.

Ejemplo

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil (H, μ_H, δ_H) es un H-módulo de Hopf por la derecha.

Teorema

Si (M, ϕ_M, ρ_M) es un H-módulo de Hopf por la derecha se tiene que

$$\phi_M \circ (M \otimes \Pi_H^R) \circ \rho_M = id_M.$$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf por la derecha. El endomorfismo $q_M := \phi_M \circ (M \otimes \lambda_H) \circ \rho_M : M \to M$ satisface la igualdad

$$\rho_M \circ q_M = (M \otimes \Pi_H^L) \circ \rho_M \circ q_M$$

y, como consecuencia, es idempotente. Es más, si M^{coH} (objeto de coinvariantes) es la imagen de q_M y $p_M : M \to M^{coH}$, $i_M : M^{coH} \to M$ los morfismos tales que $q_M = i_M \circ p_M$ e $id_{M^{coH}} = p_M \circ i_M$, se tiene que

$$\begin{tikzcd} M^{coH} \arrow[r, "i_M"] & M \arrow[r, shift left, "\rho_M"] \arrow[r, shift right, "(M \otimes \Pi_H^L) \circ \rho_M"'] & M \otimes H \end{tikzcd}$$

es un diagrama igualador.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf por la derecha. El endomorfismo

$$\nabla_M := (p_M \otimes H) \circ \rho_M \circ \phi_M \circ (i_M \otimes H) : M^{coH} \otimes H \to M^{coH} \otimes H$$

es idempotente y satisface las siguientes igualdades:

$$\nabla_M = ((p_M \circ \phi_M) \otimes H) \circ (i_M \otimes \delta_H),$$

$$(M^{coH} \otimes \delta_H) \circ \nabla_M = (\nabla_M \otimes H) \circ (M^{coH} \otimes \delta_H),$$

$$\nabla_M = (M^{coH} \otimes \mu_H) \circ ((\nabla_M \circ (M^{coH} \otimes \eta_H)) \otimes H).$$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf por la derecha. El endomorfismo

$$\nabla_M := (p_M \otimes H) \circ \rho_M \circ \phi_M \circ (i_M \otimes H) : M^{coH} \otimes H \to M^{coH} \otimes H$$

es idempotente y satisface las siguientes igualdades:

$$\nabla_M = ((p_M \circ \phi_M) \otimes H) \circ (i_M \otimes \delta_H),$$

$$(M^{coH} \otimes \delta_H) \circ \nabla_M = (\nabla_M \otimes H) \circ (M^{coH} \otimes \delta_H),$$

$$\nabla_M = (M^{coH} \otimes \mu_H) \circ ((\nabla_M \circ (M^{coH} \otimes \eta_H)) \otimes H).$$

En las condiciones anteriores definimos los morfismos

$$\omega_M : M^{coH} \otimes H \to M, \qquad \omega'_M : M \to M^{coH} \otimes H$$

por $\omega_M = \phi_M \circ (i_M \otimes H)$ y $\omega'_M = (p_M \otimes H) \circ \rho_M$. Entonces, $\omega_M \circ \omega'_M = id_M$ y $\nabla_M = \omega'_M \circ \omega_M$.

Además el siguiente diagrama es conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dr, "\omega'_M"] & \\
M^{coH} \otimes H \arrow[ur, "\omega_M"] \arrow[rr, "\nabla_M"] \arrow[dr, "p_{M^{coH} \otimes H}"'] & & M^{coH} \otimes H \\
 & M^{coH} \times H \arrow[ur, "i_{M^{coH} \otimes H}"'] &
\end{tikzcd}
$$

donde $M^{coH} \times H$ denota la imagen de ∇_M y $p_{M^{coH} \otimes H}$, $i_{M^{coH} \otimes H}$ los morfismos tales que $p_{M^{coH} \otimes H} \circ i_{M^{coH} \otimes H} = id_{M^{coH} \times H}$ e $i_{M^{coH} \otimes H} \circ p_{M^{coH} \otimes H} = \nabla_M$.

Por lo tanto, el morfismo $\alpha_M = p_{M^{coH} \otimes H} \circ \omega'_M$ es un isomorfismo de H-comódulos por la derecha con inverso $\alpha_M^{-1} = \omega_M \circ i_{M^{coH} \otimes H}$. La estructura de comódulo de $M^{coH} \times H$ es la inducida por el isomorfismo α_M y es igual a:

$$\rho_{M^{coH} \times H} = (p_{M^{coH} \otimes H} \otimes H) \circ (M^{coH} \otimes \delta_H) \circ i_{M^{coH} \otimes H}.$$

Por lo tanto, el morfismo $\alpha_M = p_{M^{coH} \otimes H} \circ \omega'_M$ es un isomorfismo de H-comódulos por la derecha con inverso $\alpha_M^{-1} = \omega_M \circ i_{M^{coH} \otimes H}$. La estructura de comódulo de $M^{coH} \times H$ es la inducida por el isomorfismo α_M y es igual a:

$$\rho_{M^{coH} \times H} = (p_{M^{coH} \otimes H} \otimes H) \circ (M^{coH} \otimes \delta_H) \circ i_{M^{coH} \otimes H}.$$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf por la derecha. Entonces $(M^{coH} \times H, \phi_{M^{coH} \times H}, \rho_{M^{coH} \times H})$, donde

$$\phi_{M^{coH} \times H} = p_{M^{coH} \otimes H} \circ (M^{coH} \otimes \mu_H) \circ (i_{M^{coH} \otimes H} \otimes H),$$

es un H-módulo de Hopf por la derecha.

Teorema

Sean H un cuasigrupo de Hopf débil y sean (M, ϕ_M, ρ_M), (N, ϕ_N, ρ_N) H-módulos de Hopf por la derecha. Si existe un isomorfismo de H-comódulos por la derecha

$$\alpha : M \to N,$$

se tiene que

$$(M, \phi_M^{\alpha} = \alpha^{-1} \circ \phi_N \circ (\alpha \otimes H), \rho_M)$$

es un H-módulo de Hopf por la derecha.

Teorema

Sean H un cuasigrupo de Hopf débil y sean (M, ϕ_M, ρ_M), (N, ϕ_N, ρ_N) H-módulos de Hopf por la derecha. Si existe un isomorfismo de H-comódulos por la derecha

$$\alpha : M \to N,$$

se tiene que

$$(M, \phi_M^{\alpha} = \alpha^{-1} \circ \phi_N \circ (\alpha \otimes H), \rho_M)$$

es un H-módulo de Hopf por la derecha.

¿Qué ocurre cuando aplicamos el resultado anterior al isomorfismo

$$\alpha_M = p_{M^{coH} \otimes H} \circ \omega'_M : M \to M^{coH} \times H?$$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil, sea (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf por la derecha y sea $\alpha_M : M \to M^{coH} \times H$ el isomorfismo anterior. Entonces, $(M, \phi_M^{\alpha_M}, \rho_M)$ es un H-módulo de Hopf por la derecha con el mismo objeto de coinvariantes que (M, ϕ_M, ρ_M). Se tiene la identidad

$$\phi_M^{\alpha_M} = \phi_M \circ (q_M \otimes \mu_H) \circ (\rho_M \otimes H)$$

y $q_M^{\alpha_M} = q_M$ donde $q_M^{\alpha_M} = \phi_M^{\alpha_M} \circ (M \otimes \lambda_H) \circ \rho_M$ es el idempotente asociado a $(M, \phi_M^{\alpha_M}, \rho_M)$. Además,

$$\nabla_M^{\alpha_M} = \nabla_M : M^{coH} \otimes H \to M^{coH} \otimes H$$

y esto implica que, para $(M, \phi_M^{\alpha_M}, \rho_M)$, el isomorfismo entre M y $M^{coH} \times H$ es α_M. Finalmente, tenemos que

$$(\phi_M^{\alpha_M})^{\alpha_M} = \phi_M^{\alpha_M}.$$

Ejemplo

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil, entonces (H, μ_H, δ_H) un H-módulo de Hopf por la derecha y $\phi_H^{\alpha_H} = \mu_H$ ya que

$$\phi_H^{\alpha_H} = \mu_H \circ (\Pi_H^L \otimes \mu_H) \circ (\delta_H \otimes H) = \mu_H.$$

Ejemplo

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil, entonces (H, μ_H, δ_H) un H-módulo de Hopf por la derecha y $\phi_H^{\alpha_H} = \mu_H$ ya que

$$\phi_H^{\alpha_H} = \mu_H \circ (\Pi_H^L \otimes \mu_H) \circ (\delta_H \otimes H) = \mu_H.$$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf por la derecha. Entonces, para el H-módulo de Hopf por la derecha $(M^{coH} \times H, \phi_{M^{coH} \times H}, \rho_{M^{coH} \times H})$ se cumple la identidad

$$\phi_{M^{coH} \times H}^{\alpha_{M^{coH} \times H}} = \phi_{M^{coH} \times H}.$$

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. La categoría de H-módulos de Hopf por la derecha se define como aquella cuyos objetos son los H-módulos de Hopf por la derecha y los morfismos $f : (M, \phi_M, \rho_M) \to (P, \phi_P, \rho_P)$ son morfismos $f : M \to P$ en C de H-comódulos y tales que son cuasilineales, esto es,

$$f \circ \phi_M^{\alpha_M} = \phi_P^{\alpha_P} \circ (f \otimes H).$$

La categoría la denotaremos como es habitual por HM_H^H.

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. La categoría de H-módulos de Hopf por la derecha se define como aquella cuyos objetos son los H-módulos de Hopf por la derecha y los morfismos $f : (M, \phi_M, \rho_M) \to (P, \phi_P, \rho_P)$ son morfismos $f : M \to P$ en C de H-comódulos y tales que son cuasilineales, esto es,

$$f \circ \phi_M^{\alpha_M} = \phi_P^{\alpha_P} \circ (f \otimes H).$$

La categoría la denotaremos como es habitual por HM_H^H.

Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf (versión débil)

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y (M, ϕ_M, ρ_M) un objeto en HM_H^H. Se tiene que (M, ϕ_M, ρ_M) y $(M^{coH} \times H, \phi_{M^{coH} \times H}, \rho_{M^{coH} \times H})$ son isomorfos en HM_H^H.

J.N. Alonso Alvarez, J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, Strong Hopf modules for weak Hopf quasigroups, Colloquium Mathematicum-WARSAW 148 No. 2 (2017), 231-246.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles (versión fuerte)

1. Módulos de Hopf en diferentes contextos
2. Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles (versión débil)
3. Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles (versión fuerte)
4. Módulos Doi-Hopf: Motivación
5. Módulos Doi-Hopf para cuasigrupos de Hopf débiles

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Sea (N, ψ_N) un objeto en Mod_{H_L}. Definimos el objeto $N \otimes_{H_L} H$ mediante el diagrama coigualador

$$\begin{tikzcd} N \otimes H_L \otimes H \arrow[r, shift left, "\psi_N \otimes H"] \arrow[r, shift right, "N \otimes \varphi_H"'] & N \otimes H \arrow[r, "n_N"] & N \otimes_{H_L} H \end{tikzcd}$$

donde $\varphi_H = \mu_H \circ (H \otimes i_L)$.

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Sea (N, ψ_N) un objeto en Mod_{H_L}. Definimos el objeto $N \otimes_{H_L} H$ mediante el diagrama coigualador

$$N \otimes H_L \otimes H \underset{N \otimes \varphi_H}{\overset{\psi_N \otimes H}{\rightrightarrows}} N \otimes H \xrightarrow{n_N} N \otimes_{H_L} H$$

donde $\varphi_H = \mu_H \circ (H \otimes i_L)$.

Para todo $(N, \psi_N) \in \mathrm{Mod}_{H_L}$ se tiene que

$$(n_N \otimes H) \circ (\psi_N \otimes \delta_H) = (n_N \otimes H) \circ (N \otimes (\delta_H \circ \varphi_H)).$$

Como consecuencia existe un único morfismo

$$\rho_{N \otimes_{H_L} H} : N \otimes_{H_L} \otimes H \to (N \otimes_{H_L} H) \otimes H$$

tal que $\rho_{N \otimes_{H_L} H} \circ n_N = (n_N \otimes H) \circ (N \otimes \delta_H)$ y, por lo tanto, $(N \otimes_{H_L} H, \rho_{N \otimes_{H_L} H})$ es un H-comódulo por la derecha.

Por otro lado,

$$n_N \circ (\psi_N \otimes \mu_H) = n_N \circ (N \otimes (\mu_H \circ (\varphi_H \otimes H)))$$

y entonces, si el funtor $- \otimes H$ conserva coigualadores, existe un único morfismo

$$\phi_{N \otimes_{H_L} H} : (N \otimes_{H_L} H) \otimes H \to N \otimes_{H_L} H$$

tal que

$$\phi_{N \otimes_{H_L} H} \circ (n_N \otimes H) = n_N \circ (N \otimes \mu_H).$$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil tal que $-\otimes H$ conserva coigualadores. Existe un funtor

$$\mathrm{F} : \mathrm{Mod}_{H_L} \to \mathrm{HM}_H^H,$$

llamado funtor de inducción, definido en los objetos como

$$F((N, \psi_N)) = (N \otimes_{H_L} H, \phi_{N\otimes_{H_L} H}, \rho_{N\otimes_{H_L} H})$$

y en los morfismos por

$$F(f) = f \otimes_{H_L} H$$

donde $f \otimes_{H_L} H$ es el único morfismo tal que $n_P \circ (f \otimes H) = (f \otimes_{H_L} H) \circ n_N$.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Sea (M, ϕ_M, ρ_M) en HM_H^H. Entonces

$$\phi_M \circ (i_M \otimes \mu_H) = \phi_M \circ (i_M \otimes \mu_H) \circ (\nabla_M \otimes H).$$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Sea (M, ϕ_M, ρ_M) en HM_H^H. Entonces

$$\phi_M \circ (i_M \otimes \mu_H) = \phi_M \circ (i_M \otimes \mu_H) \circ (\nabla_M \otimes H).$$

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Con SHM_H^H denotaremos la subcategoría plena de HM_H^H cuyos objetos son los H-módulos de Hopf por la derecha (M, ϕ_M, ρ_M) tales que:

$$\phi_M \circ ((\phi_M \circ (M \otimes i_L)) \otimes H) = \phi_M \circ (M \otimes (\mu_H \circ (i_L \otimes H))).$$

Los objetos de SHM_H^H se denominarán H-módulos fuertes de Hopf por la derecha.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Sea (M, ϕ_M, ρ_M) en HM_H^H. Entonces

$$\phi_M \circ (i_M \otimes \mu_H) = \phi_M \circ (i_M \otimes \mu_H) \circ (\nabla_M \otimes H).$$

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Con SHM_H^H denotaremos la subcategoría plena de HM_H^H cuyos objetos son los H-módulos de Hopf por la derecha (M, ϕ_M, ρ_M) tales que:

$$\phi_M \circ ((\phi_M \circ (M \otimes i_L)) \otimes H) = \phi_M \circ (M \otimes (\mu_H \circ (i_L \otimes H))).$$

Los objetos de SHM_H^H se denominarán H-módulos fuertes de Hopf por la derecha.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil tal que $- \otimes H$ conserva coigualadores. El funtor de inducción $\mathrm{F} : \mathrm{Mod}_{H_L} \to \mathrm{HM}_H^H$ se factoriza por SHM_H^H.

$$\mathrm{F} : \mathrm{Mod}_{H_L} \to \mathrm{SHM}_H^H$$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (M, ϕ_M, ρ_M) un objeto en SHM_H^H. Se tiene que el par

$$(M^{coH}, \psi_{M^{coH}} = p_M \circ \phi_M \circ (i_M \otimes i_L))$$

es un H_L-módulo por la derecha. Además, si $g : M \to T$ es un morfismo en SHM_H^H existe un único morfismo de H_L-módulos por la derecha $g^{coH} : M^{coH} \to T^{coH}$ tal que

$$i_T \circ g^{coH} = g \circ i_M.$$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (M, ϕ_M, ρ_M) un objeto en SHM_H^H. Se tiene que el par

$$(M^{coH}, \psi_{M^{coH}} = p_M \circ \phi_M \circ (i_M \otimes i_L))$$

es un H_L-módulo por la derecha. Además, si $g : M \to T$ es un morfismo en SHM_H^H existe un único morfismo de H_L-módulos por la derecha $g^{coH} : M^{coH} \to T^{coH}$ tal que

$$i_T \circ g^{coH} = g \circ i_M.$$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Existe un funtor

$$\mathrm{G} : \mathrm{SHM}_H^H \to \mathrm{Mod}_{H_L},$$

llamado funtor de coinvariantes, definido para objetos como

$$\mathrm{G}((M, \phi_M, \rho_M)) = (M^{coH}, \psi_{M^{coH}})$$

y para morfismos como $\mathrm{G}(g) = g^{coH}$.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil tal que $-\otimes H$ conserva coigualadores y sea (M, ϕ_M, ρ_M) perteneciente a SHM_H^H. Los objetos $M^{coH} \otimes_{H_L} H$ y $M^{coH} \times H$ son isomorfos como H-módulos de Hopf por la derecha. El isomorfismo

$$s_M : M^{coH} \otimes_{H_L} H \to M^{coH} \times H$$

es el único morfismo tal que $s_M \circ n_{M^{coH}} = p_{M^{coH} \otimes H}$.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil tal que $-\otimes H$ conserva coigualadores y sea (M, ϕ_M, ρ_M) perteneciente a SHM_H^H. Los objetos $M^{coH} \otimes_{H_L} H$ y $M^{coH} \times H$ son isomorfos como H-módulos de Hopf por la derecha. El isomorfismo

$$s_M : M^{coH} \otimes_{H_L} H \to M^{coH} \times H$$

es el único morfismo tal que $s_M \circ n_{M^{coH}} = p_{M^{coH} \otimes H}$.

Teorema

Dado un cuasigrupo de Hopf débil H tal que $-\otimes H$ conserva coigualadores, el funtor de inducción $\mathrm{F} : \mathrm{Mod}_{H_L} \to \mathrm{SHM}_H^H$ es adjunto por la izquierda del funtor de coinvariantes $\mathrm{G} : \mathrm{SHM}_H^H \to \mathrm{Mod}_{H_L}$. La unidad de la adjunción está dada por

$$u_N : N \to (N \otimes_{H_L} H)^{coH},$$

donde u_N es el único morfismo tal que $i_{N \otimes_{H_L} H} \circ u_N = n_N \circ (N \otimes \eta_H)$ y la counidad por $v_M : M^{coH} \otimes_{H_L} H \to M$ donde v_M es el único morfismo tal que

$$v_M \circ n_{M^{coH}} = \phi_M \circ (i_M \otimes H)$$

Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf (versión fuerte)

Si H es un cuasigrupo de Hopf débil tal que $-\otimes H$ conserva coigualadores y (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf fuerte por la derecha,

$$v_M = M^{coH} \otimes_{H_L} H \to M$$

es un isomorfismo en SHM_H^H y $v_M = \alpha_M^{-1} \circ s_M$.

Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf (versión fuerte)

Si H es un cuasigrupo de Hopf débil tal que $-\otimes H$ conserva coigualadores y (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf fuerte por la derecha,

$$v_M = M^{coH} \otimes_{H_L} H \to M$$

es un isomorfismo en SHM_H^H y $v_M = \alpha_M^{-1} \circ s_M$.

J.N. Alonso Alvarez, J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, Strong Hopf modules for weak Hopf quasigroups, Colloquium Mathematicum-WARSAW 148 No. 2 (2017), 231-246.

Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf (versión fuerte)

Si H es un cuasigrupo de Hopf débil tal que $-\otimes H$ conserva coigualadores y (M, ϕ_M, ρ_M) un H-módulo de Hopf fuerte por la derecha,

$$v_M = M^{coH} \otimes_{H_L} H \to M$$

es un isomorfismo en SHM_H^H y $v_M = \alpha_M^{-1} \circ s_M$.

J.N. Alonso Alvarez, J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, Strong Hopf modules for weak Hopf quasigroups, Colloquium Mathematicum-WARSAW 148 No. 2 (2017), 231-246.

Teorema

Si H es un cuasigrupo de Hopf débil tal que $-\otimes H$ conserva coigualadores, el par adjunto (F, G) es una equivalencia de categorías entre Mod_{H_L} y SHM_H^H.

Módulos Doi-Hopf

1. Módulos de Hopf en diferentes contextos
2. Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles (versión débil)
3. Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles (versión fuerte)
4. Módulos Doi-Hopf: Motivación
5. Módulos Doi-Hopf para cuasigrupos de Hopf débiles

MOTIVACIÓN:

1) Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y C=$\mathbb{F}$-Vect. Sea H un álgebra de Hopf en C and sea B un H-comódulo álgebra por la derecha (la coacción es un morfismo de álgebras) con coacción $\rho_B : B \to B \otimes H$, $\rho_B(b) = b_{(0)} \otimes b_{(1)}$.
La noción de (H, B)-módulo de Hopf (módulo Doi-Hopf) fue introducida por Y. Doi en

> **Y. Doi**, On the structure of relative Hopf modules, Comm. Algebra 11, (1983), 243-255.

como una generalización de la noción clásica de módulo de Hopf de la siguiente manera: Sea M un B-módulo por la derecha tal que es también un H-comódulo por la derecha. Si, para todos $m \in M$ y $b \in B$, escribimos $m.b$ para la acción y $\rho_M(m) = m_{[0]} \otimes m_{[1]}$ para la coacción, diremos que M es un (H, B)-módulo de Hopf por la derecha si se cumple la igualdad

$$\rho_M(m.b) = m_{[0]}.b_{(0)} \otimes m_{[1]}b_{(1)}$$

donde $m_{[1]}b_{(1)}$ es el producto en H de $m_{[1]}$ y $b_{(1)}$.

MOTIVACIÓN:

1) Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y C=$\mathbb{F}$-Vect. Sea H un álgebra de Hopf en C and sea B un H-comódulo álgebra por la derecha (la coacción es un morfismo de álgebras) con coacción $\rho_B : B \to B \otimes H$, $\rho_B(b) = b_{(0)} \otimes b_{(1)}$.
La noción de (H, B)-módulo de Hopf (módulo Doi-Hopf) fue introducida por Y. Doi en

    Y. Doi, On the structure of relative Hopf modules, Comm. Algebra 11, (1983), 243-255.

como una generalización de la noción clásica de módulo de Hopf de la siguiente manera: Sea M un B-módulo por la derecha tal que es también un H-comódulo por la derecha. Si, para todos $m \in M$ y $b \in B$, escribimos $m.b$ para la acción y $\rho_M(m) = m_{[0]} \otimes m_{[1]}$ para la coacción, diremos que M es un (H, B)-módulo de Hopf por la derecha si se cumple la igualdad

$$\rho_M(m.b) = m_{[0]}.b_{(0)} \otimes m_{[1]} b_{(1)}$$

donde $m_{[1]} b_{(1)}$ es el producto en H de $m_{[1]}$ y $b_{(1)}$.
Un morfismo entre dos (H, B)-módulos de Hopf es una aplicación en C tal que es B-lineal y H-colineal. Estos módulos de Hopf y sus morfismos constituyen una categoría denotada por HM_B^H.

Si existe un morfismo de H-comódulos $h : H \to B$ tal que es un morfismo de álgebras (i.e. h es una integral total multiplicativa), y

$$M^{coH} = \{m \in M \mid \rho_M(m) = m \otimes 1_H\}, \quad B^{coH} = \{b \in B \mid \rho_B(b) = b \otimes 1_H\}$$

son los subobjetos de invariantes, M^{coH} es un B^{coH}-módulo por la derecha. Usando esta propiedad, Doi probó que para todo $M \in \mathrm{HM}_B^H$

$$M \simeq M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B$$

como (H, B)-módulos de Hopf.

Si existe un morfismo de H-comódulos $h : H \to B$ tal que es un morfismo de álgebras (i.e. h es una integral total multiplicativa), y

$$M^{coH} = \{m \in M \mid \rho_M(m) = m \otimes 1_H\}, \quad B^{coH} = \{b \in B \mid \rho_B(b) = b \otimes 1_H\}$$

son los subobjetos de invariantes, M^{coH} es un B^{coH}-módulo por la derecha. Usando esta propiedad, Doi probó que para todo $M \in \mathrm{HM}_B^H$

$$M \simeq M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B$$

como (H, B)-módulos de Hopf.

En las condiciones previas también se puede demostrar que existen dos funtores

$$\mathsf{F} = - \otimes_{B^{coH}} B : \mathrm{Mod}_{B^{coH}} \to \mathrm{HM}_B^H, \quad \mathsf{G} = (\ \ )^{coH} : \mathrm{HM}_B^H \to \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$$

tales que $\mathsf{F} \dashv \mathsf{G}$. Además este par adjunto induce una equivalencia de categorías entre HM_B^H y $\mathrm{Mod}_{B^{coH}}$.

Si existe un morfismo de H-comódulos $h : H \to B$ tal que es un morfismo de álgebras (i.e. h es una integral total multiplicativa), y

$$M^{coH} = \{m \in M \mid \rho_M(m) = m \otimes 1_H\}, \quad B^{coH} = \{b \in B \mid \rho_B(b) = b \otimes 1_H\}$$

son los subobjetos de invariantes, M^{coH} es un B^{coH}-módulo por la derecha. Usando esta propiedad, Doi probó que para todo $M \in \mathrm{HM}_B^H$

$$M \simeq M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B$$

como (H, B)-módulos de Hopf.

En las condiciones previas también se puede demostrar que existen dos funtores

$$\mathsf{F} = - \otimes_{B^{coH}} B : \mathrm{Mod}_{B^{coH}} \to \mathrm{HM}_B^H, \quad \mathsf{G} = (\ \ )^{coH} : \mathrm{HM}_B^H \to \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$$

tales que $\mathsf{F} \dashv \mathsf{G}$. Además este par adjunto induce una equivalencia de categorías entre HM_B^H y $\mathrm{Mod}_{B^{coH}}$.

Para $B = H$ y $h = id_H$ Obtenemos los resultados probados por Larson y Sweedler en:

R.G. Larson, M.E. Sweedler, An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras, Amer. J. Math. 91 (1969), 75-93.

Si existe un morfismo de H-comódulos $h : H \to B$ tal que es un morfismo de álgebras (i.e. h es una integral total multiplicativa), y

$$M^{coH} = \{m \in M \mid \rho_M(m) = m \otimes 1_H\}, \quad B^{coH} = \{b \in B \mid \rho_B(b) = b \otimes 1_H\}$$

son los subobjetos de invariantes, M^{coH} es un B^{coH}-módulo por la derecha. Usando esta propiedad, Doi probó que para todo $M \in \mathrm{HM}_B^H$

$$M \simeq M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B$$

como (H, B)-módulos de Hopf.

En las condiciones previas también se puede demostrar que existen dos funtores

$$\mathrm{F} = - \otimes_{B^{coH}} B : \mathrm{Mod}_{B^{coH}} \to \mathrm{HM}_B^H, \quad \mathrm{G} = (\ \ )^{coH} : \mathrm{HM}_B^H \to \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$$

tales que $\mathrm{F} \dashv \mathrm{G}$. Además este par adjunto induce una equivalencia de categorías entre HM_B^H y $\mathrm{Mod}_{B^{coH}}$.

Para $B = H$ y $h = id_H$ Obtenemos los resultados probados por Larson y Sweedler en:

R.G. Larson, M.E. Sweedler, An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras, Amer. J. Math. 91 (1969), 75-93.

En este caso $H^{coH} = \mathbb{F}$, $M \simeq M^{coH} \otimes H$ en HM_H^H, y $\mathrm{HM}_H^H \approx \mathbb{F}$-Vect.

2) Sea C $= \mathbb{F}$-Vect. Sea H un álgebra de Hopf débil en C, sea $\Pi_H^L : H \to H$ el morfismo idempotente codominio

$$\Pi_H^L(h) = \varepsilon_H(1_{(0)}h)1_{(1)}, \quad Im(\Pi_H^L) = H_L$$

y sea B un H-comódulo álgebra por la derecha con coacción $\rho_B : B \to B \otimes H$. Podemos definir las nociones de (H, B)-módulo de Hopf y de morfismo de (H, B)-módulos de Hopf como en el caso de las álgebras de Hopf. Estos objetos y sus morfismos dan lugar a una categoría que denotaremos como HM_B^H.

2) Sea C $=$ $\mathbb{F}$-Vect. Sea H un álgebra de Hopf débil en C, sea $\Pi_H^L : H \to H$ el morfismo idempotente codominio

$$\Pi_H^L(h) = \varepsilon_H(1_{(0)}h)1_{(1)}, \quad Im(\Pi_H^L) = H_L$$

y sea B un H-comódulo álgebra por la derecha con coacción $\rho_B : B \to B \otimes H$. Podemos definir las nociones de (H, B)-módulo de Hopf y de morfismo de (H, B)-módulos de Hopf como en el caso de las álgebras de Hopf. Estos objetos y sus morfismos dan lugar a una categoría que denotaremos como HM_B^H.

En este contexto, para todo $M \in \mathrm{HM}_B^H$, el subobjeto de coinvariantes se define como:

$$M^{coH} = \{m \in M \mid \rho_M(m) = m_{[0]} \otimes \Pi_H^L(m_{[1]})\}.$$

Por otro lado,

$$B^{coH} = \{b \in B \mid \rho_B(b) = b_{(0)} \otimes \Pi_H^L(b_{(1)})\}$$

y, como en el caso de las álgebras de Hopf, M^{coH} es un B^{coH}-módulo por la derecha si existe un morfismo de comódulos $h : H \to B$ que es de álgebras (i.e., h es una integral total multiplicativa).

2) Sea C $=\mathbb{F}$-Vect. Sea H un álgebra de Hopf débil en C, sea $\Pi_H^L : H \to H$ el morfismo idempotente codominio

$$\Pi_H^L(h) = \varepsilon_H(1_{(0)}h)1_{(1)}, \quad Im(\Pi_H^L) = H_L$$

y sea B un H-comódulo álgebra por la derecha con coacción $\rho_B : B \to B \otimes H$. Podemos definir las nociones de (H, B)-módulo de Hopf y de morfismo de (H, B)-módulos de Hopf como en el caso de las álgebras de Hopf. Estos objetos y sus morfismos dan lugar a una categoría que denotaremos como HM_B^H.
En este contexto, para todo $M \in \mathrm{HM}_B^H$, el subobjeto de coinvariantes se define como:

$$M^{coH} = \{m \in M \mid \rho_M(m) = m_{[0]} \otimes \Pi_H^L(m_{[1]})\}.$$

Por otro lado,

$$B^{coH} = \{b \in B \mid \rho_B(b) = b_{(0)} \otimes \Pi_H^L(b_{(1)})\}$$

y, como en el caso de las álgebras de Hopf, M^{coH} es un B^{coH}-módulo por la derecha si existe un morfismo de comódulos $h : H \to B$ que es de álgebras (i.e., h es una integral total multiplicativa).
Usando estos hechos, Zhang y Zhu probaron en

- **L. Zhang, S. Zhu,** Fundamental theorems of weak Doi-Hopf modules and semisimple weak smash product Hopf algebras, Comm. Algebra 32 (2004), 3403-3415.

que, para todo $M \in \mathrm{HM}_B^H$,

$$M \simeq M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B$$

como (H, B)-módulos de Hopf.

También existen dos funtores

$$\mathsf{F} = - \otimes_{B^{coH}} B : \mathsf{Mod}_{B^{coH}} \to \mathsf{HM}_B^H, \quad \mathsf{G} = (\ \ )^{coH} : \mathsf{HM}_B^H \to \mathsf{Mod}_{B^{coH}}$$

tales que $F \dashv G$. Es más, como en el caso de las álgebras de Hopf, el anterior par adjunto induce una equivalencia de categorías entre HM_B^H y $\mathsf{Mod}_{B^{coH}}$.

También existen dos funtores

$$\mathsf{F} = - \otimes_{B^{coH}} B : \mathsf{Mod}_{B^{coH}} \to \mathsf{HM}_B^H, \quad \mathsf{G} = (\ \ )^{coH} : \mathsf{HM}_B^H \to \mathsf{Mod}_{B^{coH}}$$

tales que $F \dashv G$. Es más, como en el caso de las álgebras de Hopf, el anterior par adjunto induce una equivalencia de categorías entre HM_B^H y $\mathsf{Mod}_{B^{coH}}$.

Si $B = H$ y $h = id_H$, obtenemos los resultados probados en

- **G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi**, Weak Hopf algebras, I. Integral theory and C^*-structure, J. Algebra, 221 (1999), 385-438.

También existen dos funtores

$$\mathsf{F} = - \otimes_{B^{coH}} B : \mathrm{Mod}_{B^{coH}} \to \mathrm{HM}_B^H, \quad \mathsf{G} = (\ \ )^{coH} : \mathrm{HM}_B^H \to \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$$

tales que $F \dashv G$. Es más, como en el caso de las álgebras de Hopf, el anterior par adjunto induce una equivalencia de categorías entre HM_B^H y $\mathrm{Mod}_{B^{coH}}$.

Si $B = H$ y $h = id_H$, obtenemos los resultados probados en

- **G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi**, Weak Hopf algebras, I. Integral theory and C^*-structure, J. Algebra, 221 (1999), 385-438.

En este caso $H^{coH} = H_L$, $M \simeq M^{coH} \otimes_{H_L} H$ y $\mathrm{HM}_H^H \approx \mathrm{Mod}_{H_L}$.

También existen dos funtores

$$\mathsf{F} = - \otimes_{B^{coH}} B : \mathrm{Mod}_{B^{coH}} \to \mathsf{HM}_B^H, \quad \mathsf{G} = (\ \ )^{coH} : \mathsf{HM}_B^H \to \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$$

tales que $F \dashv G$. Es más, como en el caso de las álgebras de Hopf, el anterior par adjunto induce una equivalencia de categorías entre HM_B^H y $\mathrm{Mod}_{B^{coH}}$.

Si $B = H$ y $h = id_H$, obtenemos los resultados probados en

- **G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi**, Weak Hopf algebras, I. Integral theory and C^*-structure, J. Algebra, 221 (1999), 385-438.

En este caso $H^{coH} = H_L$, $M \simeq M^{coH} \otimes_{H_L} H$ y $\mathsf{HM}_H^H \approx \mathrm{Mod}_{H_L}$.

En resumen, teniendo en cuenta las estructuras asociativas y no asociativas tipo Hopf manejadas en este curso, esto es lo que sabemos:

Álg. Hopf	Álg. Hopf débil	Cuasigrupo Hopf	Cuasigrupo Hopf débil
$\mathsf{C} = \mathbb{F}$-Vect $h : H \to B$ itm $\mathsf{HM}_B^H \approx \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$ 1983 Doi	$\mathsf{C} = \mathbb{F}$-Vect $h : H \to B$ itm $\mathsf{HM}_B^H \approx \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$ 2004 Zhang + Zhu	$\mathsf{C} = \mathbb{F}$-Vect	$\mathsf{C} =$ **Monoidal trenzada + coigualadores**
$B = H,\ h = id_H$ $\mathsf{HM}_H^H \approx \mathsf{C}$ 1969 Larson + Sweedler	$B = H,\ h = id_H$ $\mathsf{HM}_H^H \approx \mathrm{Mod}_{H_L}$ 1999 Böhm + Nill + Szlachányi	$\mathsf{HM}_H^H \approx \mathsf{C}$ 2010 Brzeziński	$- \otimes H$ c. coigualadores $\mathsf{SHM}_H^H \approx \mathrm{Mod}_{H_L}$ 2016 Alonso + Fernández + González

Álg. Hopf	Álg. Hopf débil	Cuasigrupo Hopf	Cuasigrupo Hopf débil
C = **Mon. trenzada** + **coigualadores**	C = **Mon. trenzada** + **coigualadores**	C = **Mon. trenzada** + **coigualadores**	C = **Mon. trenzada** + **coigualadores**
$- \otimes H$ c. coigual. $- \otimes B$ c. coigual. $h : H \to B$ itm $\mathrm{HM}_B^H \approx \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$ 1983 Doi	$- \otimes H$ c. coigual. $- \otimes B$ c. coigual. $h : H \to B$ itm $\mathrm{HM}_B^H \approx \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$ 2004 Zhang + Zhu		
C = **Mon. trenzada**		C = **Mon. trenzada**	
$B = H,\ h = id_H$ $\mathrm{HM}_H^H \approx \mathsf{C}$ 1969 Larson + Sweedler	$- \otimes H$ c. coigual. $B = H,\ h = id_H$ $\mathrm{HM}_H^H \approx \mathrm{Mod}_{H_L}$ 1999 Böhm + Nill + Szlachányi	$\mathrm{HM}_H^H \approx \mathsf{C}$ 2010 Brzeziński	$- \otimes H$ c. coigual. $\mathrm{SHM}_H^H \approx \mathrm{Mod}_{H_L}$ 2016 AFG

Módulos Doi-Hopf para cuasigrupos de Hopf débiles

1. Módulos de Hopf en diferentes contextos
2. Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles (versión débil)
3. Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles (versión fuerte)
4. Módulos Doi-Hopf: Motivación
5. Módulos Doi-Hopf para cuasigrupos de Hopf débiles

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea B un magma unitario cumpliendo que es un H-comódulo por la derecha con coacción $\rho_B : B \to B \otimes H$. Diremos que (B, ρ_B) es un H-comódulo magma por la derecha si $\mu_{B\otimes H} \circ (\rho_B \otimes \rho_B) = \rho_B \circ \mu_B$.

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea B un magma unitario cumpliendo que es un H-comódulo por la derecha con coacción $\rho_B : B \to B \otimes H$. Diremos que (B, ρ_B) es un H-comódulo magma por la derecha si $\mu_{B\otimes H} \circ (\rho_B \otimes \rho_B) = \rho_B \circ \mu_B$.

Teorema

Sea (B, ρ_B) un H-comódulo magma por la derecha. Las siguientes igualdades se cumplen y son equivalentes:

(i) $(\rho_B \otimes H) \circ \rho_B \circ \eta_B = (B \otimes (\mu_H \circ c_{H,H}^{-1}) \otimes H) \circ ((\rho_B \circ \eta_B) \otimes (\delta_H \circ \eta_H))$.

(ii) $(\rho_B \otimes H) \circ \rho_B \circ \eta_B = (B \otimes \mu_H \otimes H) \circ ((\rho_B \circ \eta_B) \otimes (\delta_H \circ \eta_H))$.

(ii) $(B \otimes \overline{\Pi}_H^R) \circ \rho_B = (\mu_B \otimes H) \circ (B \otimes (\rho_B \circ \eta_B))$,

(iv) $(B \otimes \Pi_H^L) \circ \rho_B = ((\mu_B \circ c_{B,B}^{-1}) \otimes H) \circ (B \otimes (\rho_B \circ \eta_B))$.

(v) $(B \otimes \overline{\Pi}_H^R) \circ \rho_B \circ \eta_B = \rho_B \circ \eta_B$.

(vi) $(B \otimes \Pi_H^L) \circ \rho_B \circ \eta_B = \rho_B \circ \eta_B$.

Nótese que, si H es un cuasigrupo de Hopf y B un magma unitario cumpliendo que es un H-comódulo por la derecha con coacción $\rho_B : B \to B \otimes H$, diremos que (B, ρ_B) H-comódulo magma por la derecha si cumple la condición de la definición anterior. Entonces se tiene que

$$\rho_B \circ \eta_B = \eta_H \otimes \eta_B.$$

Nótese que, si H es un cuasigrupo de Hopf y B un magma unitario cumpliendo que es un H-comódulo por la derecha con coacción $\rho_B : B \to B \otimes H$, diremos que (B, ρ_B) H-comódulo magma por la derecha si cumple la condición de la definición anterior. Entonces se tiene que

$$\rho_B \circ \eta_B = \eta_H \otimes \eta_B.$$

Ejemplo

Si H es un cuasigrupo de Hopf (débil), (H, δ_H) es un H-comódulo magma por la derecha. Por otro lado, si H es conmutativo y C es simétrica,

$$(H^{op}, \rho_{H^{op}} = (H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H)$$

es un H-comódulo magma por la derecha.

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (B, ρ_B) un H-comódulo magma por la derecha. Diremos que un morfismo

$$h : H \to B$$

es una integral si es un morfismo de H-comodulos por la derecha. La integral se llamará total si

$$h \circ \eta_H = \eta_B.$$

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (B, ρ_B) un H-comódulo magma por la derecha. Diremos que un morfismo

$$h : H \to B$$

es una integral si es un morfismo de H-comodulos por la derecha. La integral se llamará total si

$$h \circ \eta_H = \eta_B.$$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (B, ρ_B) un H-comódulo magma por la derecha. Sea $h : H \to B$ una integral total. El endomorfismo

$$q_B := \mu_B \circ (B \otimes (h \circ \lambda_H)) \circ \rho_B : B \to B$$

satisface

$$\rho_B \circ q_B = (B \otimes \Pi_H^L) \circ \rho_B \circ q_B,$$

y, como consecuencia, q_B es un morfismo idempotente.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (B, ρ_B) un H-comódulo magma por la derecha. Sea $h : H \to B$ una integral total. Si B^{coH} (subobjeto de coinvariantes) es la imagen de q_B y $p_B : B \to B^{coH}$, $i_B : B^{coH} \to B$ son los morfismo tales que $q_B = i_B \circ p_B$ y $id_{B^{coH}} = p_B \circ i_B$, se tiene que

$$B^{coH} \xrightarrow{\ i_B\ } B \underset{(B\otimes \Pi_H^L)\circ \rho_B}{\overset{\rho_B}{\rightrightarrows}} B \otimes H,$$

es un diagrama igualador.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (B, ρ_B) un H-comódulo magma por la derecha. Sea $h : H \to B$ una integral total. Si B^{coH} (subobjeto de coinvariantes) es la imagen de q_B y $p_B : B \to B^{coH}$, $i_B : B^{coH} \to B$ son los morfismo tales que $q_B = i_B \circ p_B$ y $id_{B^{coH}} = p_B \circ i_B$, se tiene que

$$B^{coH} \xrightarrow{i_B} B \overset{\rho_B}{\underset{(B \otimes \Pi_H^L) \circ \rho_B}{\rightrightarrows}} B \otimes H,$$

es un diagrama igualador.

Nótese que, bajo las condiciones del anterior resultado, el subobjeto de coinvariantes es independiente de la integral total h ya que es el igualador de ρ_B y $(B \otimes \Pi_H^L) \circ \rho_B$.

Bajo las condiciones anteriores, $(B^{coH}, \eta_{B^{coH}}, \mu_{B^{coH}})$ es un magma unitario, donde

$$\eta_{B^{coH}} : K \to B^{coH}, \quad \mu_{B^{coH}} : B^{coH} \otimes B^{coH} \to B^{coH}$$

son las factorizaciones a través de i_B de los morfismos η_B y $\mu_B \circ (i_B \otimes i_B)$, respectivamente.

Bajo las condiciones anteriores, $(B^{coH}, \eta_{B^{coH}}, \mu_{B^{coH}})$ es un magma unitario, donde

$$\eta_{B^{coH}} : K \to B^{coH}, \quad \mu_{B^{coH}} : B^{coH} \otimes B^{coH} \to B^{coH}$$

son las factorizaciones a través de i_B de los morfismos η_B y $\mu_B \circ (i_B \otimes i_B)$, respectivamente.

En lo que sigue, el subobjeto de coinvariantes B^{coH} se llamará submagma de coinvariantes de B. Nótese que, si $B = H$, $\rho_B = \delta_H$ y $h = id_H$, el submagma de coinvariantes de H es $H^{coH} = H_L$ y entonces, en este caso, es un álgebra.

Bajo las condiciones anteriores, $(B^{coH}, \eta_{B^{coH}}, \mu_{B^{coH}})$ es un magma unitario, donde

$$\eta_{B^{coH}} : K \to B^{coH}, \quad \mu_{B^{coH}} : B^{coH} \otimes B^{coH} \to B^{coH}$$

son las factorizaciones a través de i_B de los morfismos η_B y $\mu_B \circ (i_B \otimes i_B)$, respectivamente.

En lo que sigue, el subobjeto de coinvariantes B^{coH} se llamará submagma de coinvariantes de B. Nótese que, si $B = H$, $\rho_B = \delta_H$ y $h = id_H$, el submagma de coinvariantes de H es $H^{coH} = H_L$ y entonces, en este caso, es un álgebra.

Por lo tanto, si se cumple la identidad

$$(\star) \quad \mu_B \circ ((\mu_B \circ (B \otimes i_B)) \otimes B) = \mu_B \circ (B \otimes (\mu_B \circ (i_B \otimes B)))$$

el submagma de coinvariantes $(B^{coH}, \eta_{B^{coH}}, \mu_{B^{coH}})$ es un álgebra.

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (B, ρ_B) un H-comódulo magma por la derecha. Diremos que $h : H \to B$ es un morfismo ancla si es una integral total multiplicativa (i.e., un morfismo de H-comódulos por la derecha que además es un morfismo de magmas unitarios) cumpliendo las siguientes igualdades:

(i) $\mu_B \circ ((\mu_B \circ (B \otimes h)) \otimes (h \circ \lambda_H)) \circ (B \otimes \delta_H) = \mu_B \circ (B \otimes (h \circ \Pi_H^L))$.

(ii) $\mu_B \circ ((\mu_B \circ (B \otimes (h \circ \lambda_H))) \otimes h) \circ (B \otimes \delta_H) = \mu_B \circ (B \otimes (h \circ \Pi_H^R))$.

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (B, ρ_B) un H-comódulo magma por la derecha. Diremos que $h : H \to B$ es un morfismo ancla si es una integral total multiplicativa (i.e., un morfismo de H-comódulos por la derecha que además es un morfismo de magmas unitarios) cumpliendo las siguientes igualdades:

(i) $\mu_B \circ ((\mu_B \circ (B \otimes h)) \otimes (h \circ \lambda_H)) \circ (B \otimes \delta_H) = \mu_B \circ (B \otimes (h \circ \Pi_H^L))$.

(ii) $\mu_B \circ ((\mu_B \circ (B \otimes (h \circ \lambda_H))) \otimes h) \circ (B \otimes \delta_H) = \mu_B \circ (B \otimes (h \circ \Pi_H^R))$.

Nótese que si el producto de B es asociativo, toda integral total multiplicativa h satisface (i)-(ii) y, por lo tanto, es un morfismo ancla.

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (B, ρ_B) un H-comódulo magma por la derecha. Diremos que $h : H \to B$ es un morfismo ancla si es una integral total multiplicativa (i.e., un morfismo de H-comódulos por la derecha que además es un morfismo de magmas unitarios) cumpliendo las siguientes igualdades:

(i) $\mu_B \circ ((\mu_B \circ (B \otimes h)) \otimes (h \circ \lambda_H)) \circ (B \otimes \delta_H) = \mu_B \circ (B \otimes (h \circ \Pi_H^L))$.

(ii) $\mu_B \circ ((\mu_B \circ (B \otimes (h \circ \lambda_H))) \otimes h) \circ (B \otimes \delta_H) = \mu_B \circ (B \otimes (h \circ \Pi_H^R))$.

Nótese que si el producto de B es asociativo, toda integral total multiplicativa h satisface (i)-(ii) y, por lo tanto, es un morfismo ancla.

Ejemplo

El morfismo id_H es un morfismo ancla para el H-comódulo magma (H, δ_H). También, si H es coconmutativo y C es simétrica, λ_H es un morfismo ancla para

$$(H^{op}, \rho_{H^{op}} = (H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H).$$

Si H es un cuasigrupo de Hopf, (i) y (ii) son

$$\mu_B \circ ((\mu_B \circ (B \otimes h)) \otimes (h \circ \lambda_H)) \circ (B \otimes \delta_H) = B \otimes \varepsilon_H = \mu_B \circ ((\mu_B \circ (B \otimes (h \circ \lambda_H))) \otimes h) \circ (B \otimes \delta_H),$$

o, de forma equivalente, B es un H-comódulo magma por la derecha escindido (cleft) en el sentido de la Definición 3.1 de:

> **J.N. Alonso Álvarez, J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, C. Soneira Calvo**: Cleft comodules over Hopf quasigroups, Communications in Contemporary Mathematics 17 No. 6 (2015), 1550007.

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (B, ρ_B) un H-comódulo magma por la derecha. Sea $h : H \to B$ un morfismo ancla y sea M un objeto en C. Diremos que (M, ϕ_M, ρ_M) es un (H, B, h)-módulo de Hopf fuerte si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) (M, ρ_M) Es un H-comódulo por la derecha.

(2) El morfismo $\phi_M : M \otimes B \to M$ satisface:

- (2-1) $\phi_M \circ (M \otimes \eta_B) = id_M$.
- (2-2) $\phi_M \circ ((\phi_M \circ (M \otimes i_B)) \otimes B) = \phi_M \circ (M \otimes (\mu_B \circ (i_B \otimes B)))$.
- (2-3) $\phi_M \circ ((\phi_M \circ (M \otimes h)) \otimes (h \circ \lambda_H)) \circ (M \otimes \delta_H) = \phi_M \circ (M \otimes (h \circ \Pi_H^L))$.
- (2-4) $\phi_M \circ ((\phi_M \circ (M \otimes (h \circ \lambda_H))) \otimes h) \circ (M \otimes \delta_H) = \phi_M \circ (M \otimes (h \circ \Pi_H^R))$.
- (2-5) $\rho_M \circ \phi_M = (\phi_M \otimes \mu_H) \circ (M \otimes c_{H,B} \otimes H) \circ (\rho_M \otimes \rho_B)$.

Definición

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (B, ρ_B) un H-comódulo magma por la derecha. Sea $h : H \to B$ un morfismo ancla y sea M un objeto en C. Diremos que (M, ϕ_M, ρ_M) es un (H, B, h)-módulo de Hopf fuerte si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) (M, ρ_M) Es un H-comódulo por la derecha.

(2) El morfismo $\phi_M : M \otimes B \to M$ satisface:

- (2-1) $\phi_M \circ (M \otimes \eta_B) = id_M$.
- (2-2) $\phi_M \circ ((\phi_M \circ (M \otimes i_B)) \otimes B) = \phi_M \circ (M \otimes (\mu_B \circ (i_B \otimes B)))$.
- (2-3) $\phi_M \circ ((\phi_M \circ (M \otimes h)) \otimes (h \circ \lambda_H)) \circ (M \otimes \delta_H) = \phi_M \circ (M \otimes (h \circ \Pi_H^L))$.
- (2-4) $\phi_M \circ ((\phi_M \circ (M \otimes (h \circ \lambda_H))) \otimes h) \circ (M \otimes \delta_H) = \phi_M \circ (M \otimes (h \circ \Pi_H^R))$.
- (2-5) $\rho_M \circ \phi_M = (\phi_M \otimes \mu_H) \circ (M \otimes c_{H,B} \otimes H) \circ (\rho_M \otimes \rho_B)$.

Example

Por ejemplo, (H, μ_H, δ_H) es un (H, H, id_H)-módulo de Hopf fuerte. También, si se cumple la igualdad ($\star$), (B, μ_B, ρ_B) es un (H, B, h)-módulo de Hopf fuerte.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (B, ρ_B) un H-comódulo magma por la derecha. Sea $h : H \to B$ un morfismo ancla y sea (M, ϕ_M, ρ_M) un (H, B, h)-módulo de Hopf fuerte. El endomorfismo $q_M := \phi_M \circ (M \otimes (h \circ \lambda_H)) \circ \rho_M : M \to M$ satisface

$$\rho_M \circ q_M = (M \otimes \Pi_H^L) \circ \rho_M \circ q_M,$$

y, como consecuencia, q_M es idempotente. Es más, si M^{coH} (subobjeto de coinvariantes) es la imagen de q_M y $p_M : M \to M^{coH}$, $i_M : M^{coH} \to M$ son los morfismos tales que $q_M = i_M \circ p_M$ y $id_{M^{coH}} = p_M \circ i_M$, se tiene que

$$\begin{tikzcd} M^{coH} \arrow[r, "i_M"] & M \arrow[r, shift left, "\rho_M"] \arrow[r, shift right, "(M \otimes \Pi_H^L) \circ \rho_M"'] & M \otimes H, \end{tikzcd}$$

es un diagrama igualador.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (B, ρ_B) un H-comódulo magma por la derecha. Sea $h : H \to B$ un morfismo ancla y sea (M, ϕ_M, ρ_M) un (H, B, h)-módulo de Hopf fuerte. El endomorfismo $q_M := \phi_M \circ (M \otimes (h \circ \lambda_H)) \circ \rho_M : M \to M$ satisface

$$\rho_M \circ q_M = (M \otimes \overline{\Pi}_H^R) \circ \rho_M \circ q_M,$$

y, como consecuencia, q_M es idempotente. Es más, si M^{coH} (subobjeto de coinvariantes) es la imagen de q_M y $p_M : M \to M^{coH}$, $i_M : M^{coH} \to M$ son los morfismos tales que $q_M = i_M \circ p_M$ y $id_{M^{coH}} = p_M \circ i_M$, se tiene que

$$\begin{tikzcd} M^{coH} \arrow[r, "i_M"] & M \arrow[r, shift left, "\rho_M"] \arrow[r, shift right, "(M \otimes \overline{\Pi}_H^R) \circ \rho_M"'] & M \otimes H, \end{tikzcd}$$

es un diagrama igualador.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (B, ρ_B) un H-comódulo magma por la derecha. Sea $h : H \to B$ un morfismo ancla y sea (M, ϕ_M, ρ_M) un (H, B, h)-módulo de Hopf fuerte. Se cumplen las siguientes igualdades:

$$\rho_M \circ \phi_M \circ (i_M \otimes B) = (\phi_M \otimes H) \circ (i_M \otimes \rho_B),$$

$$q_M \circ \phi_M \circ (i_M \otimes B) = \phi_M \circ (i_M \otimes q_B),$$

$$(q_M \otimes H) \circ \rho_M \circ \phi_M \circ (i_M \otimes B) = ((\phi_M \circ (M \otimes q_B)) \otimes H) \circ (i_M \otimes \rho_B),$$

$$(p_M \otimes H) \circ \rho_M \circ \phi_M \circ (i_M \otimes B) = ((p_M \circ \phi_M \circ (M \otimes q_B)) \otimes H) \circ (i_M \otimes \rho_B),$$

$$q_M \circ \phi_M \circ (i_M \otimes i_B) = \phi_M \circ (i_M \otimes i_B),$$

$$p_M \circ \phi_M \circ (i_M \otimes B) = p_M \circ \phi_M \circ (i_M \otimes q_B).$$

$$\phi_M \circ (q_M \otimes h) \circ \rho_M = id_M.$$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (B, ρ_B) un H-comódulo magma por la derecha. Sea $h : H \to B$ un morfismo ancla. Si se cumple ($\star$), para todo (H, B, h)-módulo de Hopf fuerte (M, ϕ_M, ρ_M) el subobjeto de coinvariantes M^{coH} es un B^{coH}-módulo por la derecha donde

$$\phi_{M^{coH}} = p_M \circ \phi_M \circ (i_M \otimes i_B).$$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (B, ρ_B) un H-comódulo magma por la derecha. Sea $h : H \to B$ un morfismo ancla. Si se cumple $(\star)$, para todo (H, B, h)-módulo de Hopf fuerte (M, ϕ_M, ρ_M) el subobjeto de coinvariantes M^{coH} es un B^{coH}-módulo por la derecha donde

$$\phi_{M^{coH}} = p_M \circ \phi_M \circ (i_M \otimes i_B).$$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil y sea (B, ρ_B) un H-comódulo magma por la derecha. Sea $h : H \to B$ un morfismo ancla. Supongamos que se cumplen $(\star)$ y

$$(\star,\star) \quad \mu_B \circ (i_B \otimes \mu_B) = \mu_B \circ ((\mu_B \circ (i_B \otimes B)) \otimes B).$$

Si los funtores $- \otimes B$ and $- \otimes H$ conservan coigualadores, para todo (H, B, h)-módulo de Hopf fuerte (M, ϕ_M, ρ_M), el objeto de $M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B$, definido por el coigualador de

$$T_M^1 = \phi_{M^{coH}} \otimes B, \quad T_M^2 = M^{coH} \otimes (\mu_B \circ (i_B \otimes B)),$$

es un (H, B, h)-módulo de Hopf fuerte. Es más, existe un isomorfismo de H-comódulos por la derecha ω_M entre $M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B$ y M.

Módulos de Hopf y cuasigrupos de Hopf débiles

El objeto $M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B$ se define usando el diagrama coigualador

$$\begin{tikzcd} M^{coH} \otimes B^{coH} \otimes B \arrow[r, shift left, "T_M^1"] \arrow[r, shift right, "T_M^2"'] & M^{coH} \otimes B \arrow[r, "n_{M^{coH}}"] & M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B, \end{tikzcd}$$

El objeto $M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B$ se define usando el diagrama coigualador

$$M^{coH} \otimes B^{coH} \otimes B \overset{T_M^1}{\underset{T_M^2}{\rightrightarrows}} M^{coH} \otimes B \xrightarrow{n_{M^{coH}}} M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B,$$

- $\phi_{M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B} : M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B \otimes B \to M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B$ es el único morfismo tal que

$$\phi_{M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B} \circ (n_{M^{coH}} \otimes B) = n_{M^{coH}} \circ (M^{coH} \otimes \mu_B).$$

El objeto $M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B$ se define usando el diagrama coigualador

$$M^{coH} \otimes B^{coH} \otimes B \underset{T_M^2}{\overset{T_M^1}{\rightrightarrows}} M^{coH} \otimes B \xrightarrow{n_{M^{coH}}} M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B,$$

- $\phi_{M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B} : M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B \otimes B \to M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B$ es el único morfismo tal que

$$\phi_{M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B} \circ (n_{M^{coH}} \otimes B) = n_{M^{coH}} \circ (M^{coH} \otimes \mu_B).$$

- $\rho_{M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B} : M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B \to M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B \otimes H$ es el único morfismo tal que

$$\rho_{M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B} \circ n_{M^{coH}} = (n_{M^{coH}} \otimes H) \circ (M^{coH} \otimes \rho_B).$$

El objeto $M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B$ se define usando el diagrama coigualador

$$M^{coH} \otimes B^{coH} \otimes B \underset{T_M^2}{\overset{T_M^1}{\rightrightarrows}} M^{coH} \otimes B \xrightarrow{n_{M^{coH}}} M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B,$$

- $\phi_{M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B} : M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B \otimes B \to M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B$ es el único morfismo tal que

$$\phi_{M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B} \circ (n_{M^{coH}} \otimes B) = n_{M^{coH}} \circ (M^{coH} \otimes \mu_B).$$

- $\rho_{M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B} : M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B \to M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B \otimes H$ es el único morfismo tal que

$$\rho_{M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B} \circ n_{M^{coH}} = (n_{M^{coH}} \otimes H) \circ (M^{coH} \otimes \rho_B).$$

- $\omega_M : M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B \to M$ es el único morfismo tal que

$$\omega_M \circ n_{M^{coH}} = \phi_M \circ (i_M \otimes B).$$

ω_M es un isomorfismo con inverso $\omega_M^{-1} = n_{M^{coH}} \circ (p_M \otimes h) \circ \rho_M$.

A partir de este momento asumiremos que:

- H es un cuasigrupo de Hopf débil en C y que (B, ρ_B) es un H-comódulo magma por la derecha.

A partir de este momento asumiremos que:

- H es un cuasigrupo de Hopf débil en C y que (B, ρ_B) es un H-comódulo magma por la derecha.
- $- \otimes B$ y $- \otimes H$ conservan coigualadores.

A partir de este momento asumiremos que:

- H es un cuasigrupo de Hopf débil en C y que (B, ρ_B) es un H-comódulo magma por la derecha.
- $-\otimes B$ y $-\otimes H$ conservan coigualadores.
- $h : H \to B$ es un morfismo ancla.

A partir de este momento asumiremos que:

- H es un cuasigrupo de Hopf débil en C y que (B, ρ_B) es un H-comódulo magma por la derecha.
- $- \otimes B$ y $- \otimes H$ conservan coigualadores.
- $h : H \to B$ es un morfismo ancla.
- Se cumplen las igualdades $(\star)$ y $(\star, \star)$

$$\mu_B \circ ((\mu_B \circ (B \otimes i_B)) \otimes B) = \mu_B \circ (B \otimes (\mu_B \circ (i_B \otimes B))),$$

$$\mu_B \circ (i_B \otimes \mu_B) = \mu_B \circ ((\mu_B \circ (i_B \otimes B)) \otimes B).$$

A partir de este momento asumiremos que:

- H es un cuasigrupo de Hopf débil en C y que (B, ρ_B) es un H-comódulo magma por la derecha.
- $- \otimes B$ y $- \otimes H$ conservan coigualadores.
- $h : H \to B$ es un morfismo ancla.
- Se cumplen las igualdades $(\star)$ y $(\star, \star)$

$$\mu_B \circ ((\mu_B \circ (B \otimes i_B)) \otimes B) = \mu_B \circ (B \otimes (\mu_B \circ (i_B \otimes B))),$$

$$\mu_B \circ (i_B \otimes \mu_B) = \mu_B \circ ((\mu_B \circ (i_B \otimes B)) \otimes B).$$

J.N. Alonso Álvarez, J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez: Fundamental theorems of Doi-Hopf modules in a non-associative setting, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society 42 (2019), 2701-2738.

Theorem

Sean (P, ϕ_P, ρ_P), (Q, ϕ_Q, ρ_Q) dos (H, B, h)-módulos de Hopf fuertes. Si existe un isomorfismo de H-comódulos $\omega : Q \to P$, el objeto

$$(P, \phi_P^{\omega} = \omega \circ \phi_Q \circ (\omega^{-1} \otimes B), \rho_P),$$

llamado la ω-deformación de (P, ϕ_P, ρ_P), es un (H, B, h)-módulo de Hopf fuerte.

Theorem

Sean (P, ϕ_P, ρ_P), (Q, ϕ_Q, ρ_Q) dos (H, B, h)-módulos de Hopf fuertes. Si existe un isomorfismo de H-comódulos $\omega : Q \to P$, el objeto

$$(P, \phi_P^{\omega} = \omega \circ \phi_Q \circ (\omega^{-1} \otimes B), \rho_P),$$

llamado la ω-deformación de (P, ϕ_P, ρ_P), es un (H, B, h)-módulo de Hopf fuerte.

Definición

Se define la categoría de (H, B, h)-módulos de Hopf fuertes como aquella cuyos objetos son los (H, B, h)-módulos de Hopf fuertes y cuyos morfismos $f : M \to N$ son morfismos de H-comódulos por la derecha y cuasilineales, i.e.

$$\phi_N^{\omega_N} \circ (f \otimes B) = f \circ \phi_M^{\omega_M},$$

donde $\omega_M : M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B \to M$ y $\omega_N : N^{coH} \otimes_{B^{coH}} B \to N$ son los isomorfismos de H-comódulos obtenidos previamente. Esta categoría la denotaremos como

$$\mathsf{SHM}_B^H(h).$$

Teorema

Sea (M, ϕ_M, ρ_M) un objeto en $\mathrm{SHM}_B^H(h)$. Sea ω_M el isomorfismo de H-comódulos entre $M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B$ y M. Se cumple que

$$\phi_M^{\omega_M} = \phi_M \circ (q_M \otimes (\mu_B \circ (h \otimes B))) \circ (\rho_M \otimes B)$$

y $q_M^{\omega_M} = q_M$, donde $q_M^{\omega_M} = \phi_M^{\omega_M} \circ (M \otimes (h \circ \lambda_H)) \circ \rho_M$ es el idempotente asociado a $(M, \phi_M^{\omega_M}, \rho_M)$. Entonces, $(M, \phi_M^{\omega_M}, \rho_M)$ tiene el mismo subobjeto de coinvariantes que (M, ϕ_M, ρ_M).

Dado $(M, \phi_M^{\omega_M}, \rho_M)$, el isomorfismo asociado de H-comódulos entre $M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B$ y M es ω_M, se cumple la igualdad

$$(\phi_M^{\omega_M})^{\omega_M} = \phi_M^{\omega_M}.$$

Finalmente existe un funtor idempotente

$$\mathrm{D} : \mathrm{SHM}_B^H(h) \to \mathrm{SHM}_B^H(h),$$

llamado el funtor de ω-deformación, definido en objetos por

$$D((M, \phi_M, \rho_M)) = (M, \phi_M^{\omega_M}, \rho_M)$$

y en morfismos por la identidad.

Teorema

Sea (M, ϕ_M, ρ_M) un objeto en $\mathrm{SHM}_B^H(h)$. Se cumplen las siguiente identidad:

$$\phi_M^{\omega_M} \circ (i_M \otimes B) = \phi_M \circ (i_M \otimes B).$$

Teorema

Sea (M, ϕ_M, ρ_M) un objeto en $\mathrm{SHM}_B^H(h)$. Se cumplen las siguiente identidad:

$$\phi_M^{\omega_M} \circ (i_M \otimes B) = \phi_M \circ (i_M \otimes B).$$

Teorema

Para todo objeto (M, ϕ_M, ρ_M) en $\mathrm{SHM}_B^H(h)$, el (H, B, h)-módulo de Hopf

$$(M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B, \phi_{M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B}, \rho_{M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B})$$

es invariante (objeto fijo) para el funtor de ω-deformación, i.e.,

$$D((M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B, \phi_{M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B}, \rho_{M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B}))$$

$$= (M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B, \phi_{M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B}, \rho_{M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B}).$$

Teorema Fundamental de los Módulos Doi-Hopf

Sea (M, ϕ_M, ρ_M) un objeto en $\mathrm{SHM}_B^H(h)$. Entonces

$$M \simeq M^{coH} \otimes_{B^{coH}} B$$

en $\mathrm{SHM}_B^H(h)$.

Sea (N, ϕ_N) un objeto en $\text{Mod}_{B^{coH}}$ y consideremos el siguiente diagrama coigualador:

$$\begin{tikzcd} N \otimes B^{coH} \otimes B \arrow[r, shift left, "\phi_N \otimes B"] \arrow[r, shift right, "N \otimes (\mu_B \circ (i_B \otimes B))"'] & N \otimes B \arrow[r, "n_N"] & N \otimes_{B^{coH}} B \end{tikzcd}$$

Sea (N, ϕ_N) un objeto en $\mathrm{Mod}_{B^{coH}}$ y consideremos el siguiente diagrama coigualador:

$$N \otimes B^{coH} \otimes B \underset{N \otimes (\mu_B \circ (i_B \otimes B))}{\overset{\phi_N \otimes B}{\rightrightarrows}} N \otimes B \xrightarrow{n_N} N \otimes_{B^{coH}} B$$

Entonces,

$$(n_N \otimes B) \circ (\phi_N \otimes \rho_B) = (n_N \otimes B) \circ (N \otimes (\rho_B \circ (\mu_B \circ (i_B \otimes B))))$$

y, como consecuencia, existe un único morfismo

$$\rho_{N \otimes_{B^{coH}} B} : N \otimes_{B^{coH}} B \to N \otimes_{B^{coH}} B \otimes H$$

tal que

$$\rho_{N \otimes_{B^{coH}} B} \circ n_N = (n_N \otimes B) \circ (N \otimes \rho_B).$$

Por otro lado, se tiene que

$$n_N \circ (\phi_N \otimes \mu_B) = n_N \circ (N \otimes (\mu_B \circ ((\mu_B \circ (i_B \otimes B)) \otimes B))),$$

y, usando que el funtor $- \otimes B$ conserva coigualadores, existe un único morfismo

$$\phi_{N \otimes_{B^{coH}} B} : N \otimes_{B^{coH}} B \otimes B \to N \otimes_{B^{coH}} B$$

tal que

$$\phi_{N \otimes_{B^{coH}} B} \circ (n_N \otimes B) = n_N \circ (N \otimes \mu_B).$$

Es más, se tiene que

$$(N \otimes_{B^{coH}} B, \phi_{N \otimes_{B^{coH}} B}, \rho_{N \otimes_{B^{coH}} B})$$

es un (H, B, h)-módulo de Hopf fuerte.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Existe un funtor $\mathsf{F} : \mathrm{Mod}_{B^{coH}} \to \mathrm{SHM}_B^H(h)$, llamado funtor de inducccción, definido en objetos por

$$\mathsf{F}((N, \phi_N)) = (N \otimes_{B^{coH}} B, \phi_{N \otimes_{B^{coH}} B}, \rho_{N \otimes_{B^{coH}} B})$$

y en morfismos por $F(f) = f \otimes_{B^{coH}} B$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Existe un funtor $\mathrm{F} : \mathrm{Mod}_{B^{coH}} \to \mathrm{SHM}_B^H(h)$, llamado funtor de induccción, definido en objetos por

$$\mathrm{F}((N, \phi_N)) = (N \otimes_{B^{coH}} B, \phi_{N \otimes_{B^{coH}} B}, \rho_{N \otimes_{B^{coH}} B})$$

y en morfismos por $F(f) = f \otimes_{B^{coH}} B$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Existe un funtor $\mathrm{G} : \mathrm{SHM}_B^H(h) \to \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$, llamado funtor de coinvariantes, definido en objetos por

$$\mathrm{G}((M, \phi_M, \rho_M)) = (M^{coH}, \phi_{M^{coH}})$$

y en morfismos por $G(g) = g^{coH}$.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Existe un funtor $\mathrm{F} : \mathrm{Mod}_{B^{coH}} \to \mathrm{SHM}_B^H(h)$, llamado funtor de inducccción, definido en objetos por

$$\mathrm{F}((N, \phi_N)) = (N \otimes_{B^{coH}} B, \phi_{N\otimes_{B^{coH}} B}, \rho_{N\otimes_{B^{coH}} B})$$

y en morfismos por $F(f) = f \otimes_{B^{coH}} B$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. Existe un funtor $\mathrm{G} : \mathrm{SHM}_B^H(h) \to \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$, llamado funtor de coinvariantes, definido en objetos por

$$\mathrm{G}((M, \phi_M, \rho_M)) = (M^{coH}, \phi_{M^{coH}})$$

y en morfismos por $G(g) = g^{coH}$.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf débil. El funtor F es adjunto por la izquierda de G. Además este par adjunto induce una equivalencia de categorías entre $\mathrm{SHM}_B^H(h)$ y $\mathrm{Mod}_{B^{coH}}$.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf. Existe un funtor $\mathrm{F} : \mathrm{Mod}_{B^{coH}} \to \mathrm{SHM}_B^H(h)$, llamado funtor de inducccción, definido en objetos por

$$\mathrm{F}((N, \phi_N)) = (N \otimes_{B^{coH}} B, \phi_{N \otimes_{B^{coH}} B}, \rho_{N \otimes_{B^{coH}} B})$$

y en morfismos por $F(f) = f \otimes_{B^{coH}} B$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf. Existe un funtor $\mathrm{F} : \mathrm{Mod}_{B^{coH}} \to \mathrm{SHM}_B^H(h)$, llamado funtor de induccción, definido en objetos por

$$\mathrm{F}((N, \phi_N)) = (N \otimes_{B^{coH}} B, \phi_{N \otimes_{B^{coH}} B}, \rho_{N \otimes_{B^{coH}} B})$$

y en morfismos por $F(f) = f \otimes_{B^{coH}} B$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf. Existe un funtor $\mathrm{G} : \mathrm{SHM}_B^H(h) \to \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$, llamado funtor de coinvariantes, definido en objetos por

$$\mathrm{G}((M, \phi_M, \rho_M)) = (M^{coH}, \phi_{M^{coH}})$$

y en morfismos por $G(g) = g^{coH}$.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf. Existe un funtor $\mathrm{F} : \mathrm{Mod}_{B^{coH}} \to \mathrm{SHM}_B^H(h)$, llamado funtor de inducccción, definido en objetos por

$$\mathrm{F}((N, \phi_N)) = (N \otimes_{B^{coH}} B, \phi_{N \otimes_{B^{coH}} B}, \rho_{N \otimes_{B^{coH}} B})$$

y en morfismos por $F(f) = f \otimes_{B^{coH}} B$

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf. Existe un funtor $\mathrm{G} : \mathrm{SHM}_B^H(h) \to \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$, llamado funtor de coinvariantes, definido en objetos por

$$\mathrm{G}((M, \phi_M, \rho_M)) = (M^{coH}, \phi_{M^{coH}})$$

y en morfismos por $G(g) = g^{coH}$.

Teorema

Sea H un cuasigrupo de Hopf. El funtor F es adjunto por la izquierda de G. Además este par adjunto induce una equivalencia de categorías entre $\mathrm{SHM}_B^H(h)$ y $\mathrm{Mod}_{B^{coH}}$.

Álg. Hopf	Álg. Hopf débil	Cuasigrupo Hopf	Cuasigrupo Hopf débil
C = **Mon. trenzada** + **coigualadores**	C = **Mon. trenzada** + **coigualadores**	C = **Mon. trenzada** + **coigualadores**	C = **Mon. trenzada** + **coigualadores**
$- \otimes H$ c. coigual. $- \otimes B$ c. coigual. $h : H \to B$ itm $\mathrm{HM}_B^H \approx \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$ 1983 Doi	$- \otimes H$ c. coigual. $- \otimes B$ c. coigual. $h : H \to B$ itm $\mathrm{HM}_B^H \approx \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$ 2004 Zhang + Zhu	$- \otimes H$ c. coigual. $- \otimes B$ c. coigual. $h : H \to B$ ancla $(\star) + (\star, \star)$ $\mathrm{HM}_B^H \approx \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$ 2019 AFG	$- \otimes H$ c. coigual. $- \otimes B$ c. coigual. $h : H \to B$ ancla $(\star) + (\star, \star)$ $\mathrm{SHM}_B^H \approx \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$ 2019 AFG
C = **Mon. trenzada**		**Mon. trenzada**	
$B = H,\ h = id_H$ $\mathrm{HM}_H^H \approx$ C 1969 Larson + Sweedler	$- \otimes H$ c. coigual. $B = H,\ h = id_H$ $\mathrm{HM}_H^H \approx \mathrm{Mod}_{H_L}$ 1999 Böhm + Nill + Szlachányi	$B = H,\ h = id_H$ $\mathrm{HM}_H^H \approx$ C 2010 Brzeziński	$- \otimes H$ c. coigual. $B = H,\ h = id_H$ $\mathrm{SHM}_H^H \approx \mathrm{Mod}_{H_L}$ 2016 AFG

C $= R$-Mod con R un anillo conmutativo:

Álg. Hopf	Álg. Hopf débil	Cuasigrupo Hopf	Cuasigrupo Hopf débil
$h : H \to B$ itm $\mathrm{HM}_B^H \approx \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$	$h : H \to B$ itm $\mathrm{HM}_B^H \approx \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$	$h : H \to B$ ancla $(\star) + (\star, \star)$ $\mathrm{HM}_B^H \approx \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$	$h : H \to B$ ancla $(\star) + (\star, \star)$ $\mathrm{SHM}_B^H \approx \mathrm{Mod}_{B^{coH}}$
$B = H,\ h = id_H$ $\mathrm{HM}_H^H \approx$ C	$B = H,\ h = id_H$ $\mathrm{HM}_H^H \approx \mathrm{Mod}_{H_L}$	$B = H,\ h = id_H$ $\mathrm{HM}_H^H \approx$ C	$B = H,\ h = id_H$ $\mathrm{SHM}_H^H \approx \mathrm{Mod}_{H_L}$

Referencias

- J.N. Alonso Álvarez, J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez: Cleft and Galois extensions associated to a weak Hopf quasigroup, Journal of Pure and Applied Algebra 220, No. 3 (2016), 1002-1034.
- J.N. Alonso Álvarez, J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez: Strong Hopf modules for weak Hopf quasigroups, Colloquium Mathematicum-WARSAW 148, No. 2 (2017), 231-246.
- J.N. Alonso Álvarez, J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez: Fundamental theorems of Doi-Hopf modules in a non-associative setting, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society 42 (2019), 2701-2738.